

# Fonctions linéaires, Fonctions affines

## I Proportionnalité, et fonctions linéaires

### A Généralité

#### 1 tableau de proportionnalité

On dit qu'un tableau est un tableau de proportionnalité si les termes de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par un même nombre.

Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

*Exemple:*

Côté d'un carré en cm	1	2	3	4	5	10	4,1
Périmètre de ce carré en cm	4	8	12	16	20	40	16,4

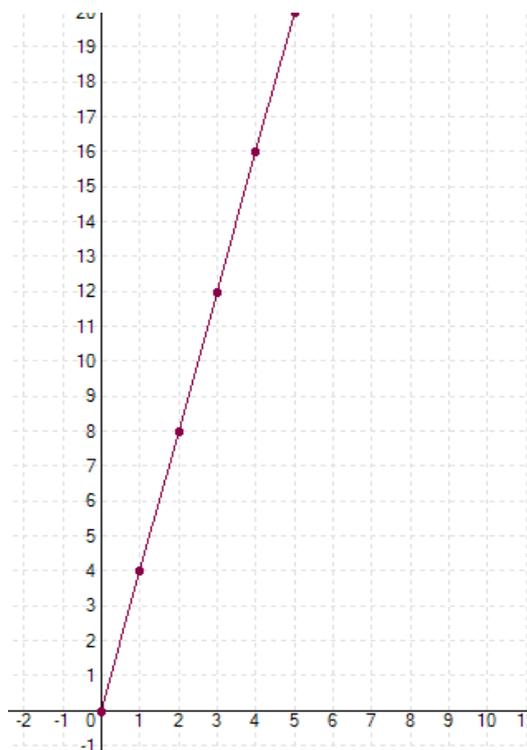
*Ce tableau est un tableau de proportionnalité, le coefficient est 4*

#### 2 graphique.

Les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère.

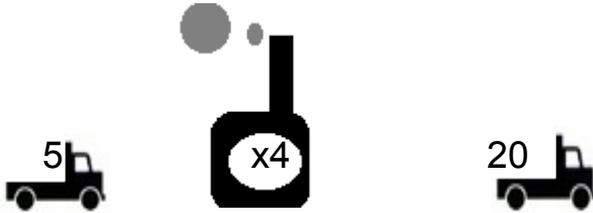
Le *coefficient directeur 4* peut être « lu » sur le graphique:

Si on avance de 1 sur l'axe des abscisses, on monte(+) de 4 sur l'axe des ordonnées



## B Fonctions Linéaires

### 1 La notion de fonction, «l'usine»



L'usine représente la **fonction linéaire**  $f$  qui à  $x$  associe  $4x$

On note:

$$f: x \rightarrow 4x \quad \text{ou} \quad f(x) = 4x$$

on a:

$$f: 5 \rightarrow 20 \text{ qu'on écrira } f(5) = 20.$$

L'usine  $f$  (la fonction linéaire) transforme la matière première (les nombres) pour « fabriquer » de nouveaux nombres (qu'on appelle images)

$f(3) = 12$  peut se traduire par:

*Par la fonction linéaire  $f$ , l'image du nombre 3 est le nombre 12.*

### 2 Fonction linéaire et proportionnalité

Ainsi à chaque situation de proportionnalité correspond une fonction linéaire.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est donc une droite passant par l'origine du repère.

### 3 Un exemple détaillé: les pourcentages

Un magasin augmente le prix de tous ses produits de 15%, remplir le tableau suivant:

Prix avant l'augmentation en €	24,40	48,80	976
Augmentation en €	3,66	7,32	146,40

En pratique on peut utiliser la fonction linéaire  $f: x \rightarrow 0,15x$  pour calculer l'augmentation de 15% ( $15\%=15/100=0,15$ ) sur un prix donné.  $f(100)=15$ ,  $f(0)=0$  etc.

**Remplir le tableau suivant:**

Prix avant l'augmentation en €	24,40	48,80	976	25	28,80
Prix après l'augmentation en €	28,06	56,12	1122,4	28,75	33,12

En pratique on peut utiliser la fonction linéaire  $g: x \rightarrow 1,15x$  pour calculer le nouveau prix après une augmentation de 15%

En effet :

$$x+0,15x=(1+0,15)x=1,15x$$

$$g(100)=115, g(0)=0 \text{ etc.}$$

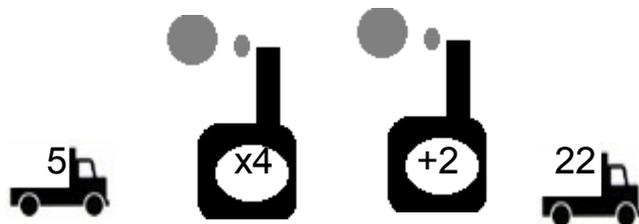
#### 4 D'autres exemples

D'autres situations classiques de problèmes sont en rapport avec la proportionnalité et les fonctions linéaires:

- **Les vitesses moyennes**
- **Les échelles**
- **etc..**

# II Fonctions affines

## 1 Avec «l'usine»:



Une fonction affine est un mécanisme qui effectue sur un nombre donné successivement deux travaux:

- il le multiplie par un nombre donné
- il ajoute un nombre donné

ici on a  $h: x \rightarrow 4x + 2$  ou  $h(x) = 4x + 2$

par exemple  $h(5) = 20 + 2 = 22$

## 2 Fonction linéaire associée

propriétés:

*Une fonction linéaire est une fonction affine particulière:*

$f: x \rightarrow 4x$  peut être vue comme  $f: x \rightarrow 4x + 0$

définition:

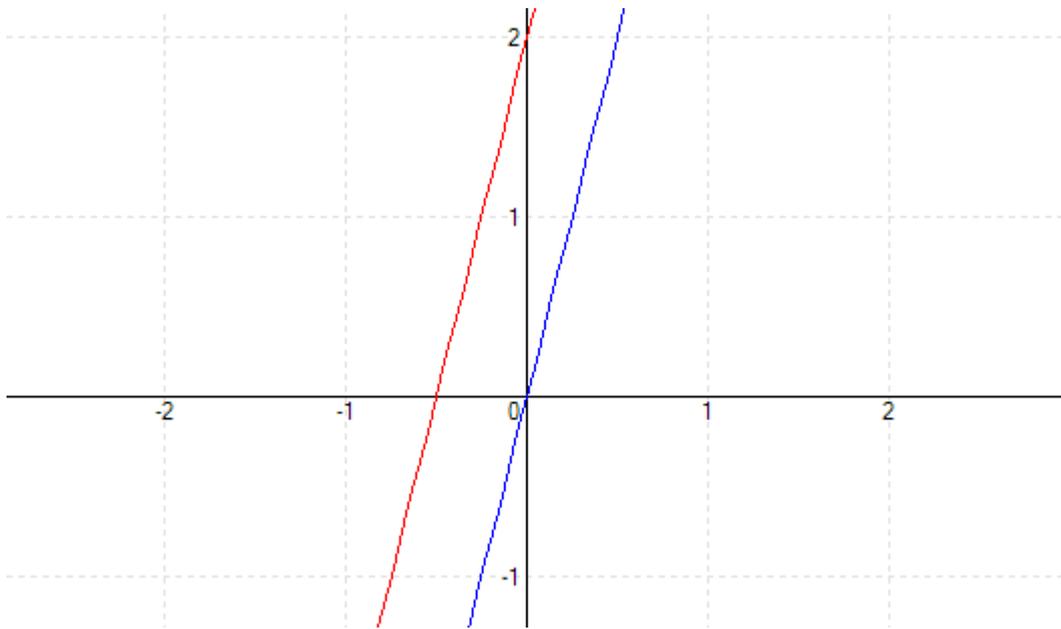
*A toute fonction affine, on peut associer de manière évidente une unique fonction linéaire:*

*A l'application affine  $g: x \rightarrow 3x + 5$  on associe la fonction linéaire  $g': x \rightarrow 3x$ .*

## 3 Représentation graphique.

La représentation graphique de la fonction affine  $h: x \rightarrow 4x + 2$  est une droite qui passe par le point de coordonnées  $(0; 2)$  appelé ordonnée à l'origine. Son coefficient directeur est 4.

Cette droite est parallèle au graphe de l'application linéaire  $f: x \rightarrow 4x$



# OFFICIEL

## CONTENU

### Fonctions linéaires et fonctions affines.

- *Fonction linéaire*
- *Fonction affine.*
- *Fonction affine et fonction linéaire associée*

### Proportionnalité et traitements usuels sur les grandeurs.

- *Applications de la proportionnalité*
- *Grandeurs composées*
- *Changements d'unités*

## COMPETENCES EXIGIBLES

Connaître la notation  $x \rightarrow ax$  pour une valeur numérique de  $a$  fixée.

Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.

Représenter graphiquement une fonction linéaire.

Lire sur la représentation graphique d'une fonction linéaire l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.

Connaître la notation  $x \rightarrow ax + b$  pour des valeurs numériques de  $a$  et  $b$  fixées.

Déterminer une fonction affine par la donnée de 2 nombres et de leurs images.

Représenter graphiquement une fonction affine.

Lire sur la représentation graphique d'une fonction affine l'image d'un nombre donné et le nombre ayant une image donnée.

Dans des situations mettant en jeu des grandeurs, l'une des grandeurs étant fonction de l'autre,

- représenter graphiquement la situation d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative,
- lire et interpréter une telle représentation

# COMMENTAIRES

La définition d'une fonction linéaire, de coefficient  $a$ , s'appuie sur l'étude des situations de proportionnalité rencontrées dans les classes précédentes. On pourra recourir à des tableaux de proportionnalité et on mettra en évidence que le processus de correspondance est « **je multiplie par  $a$**  ».

Pour des pourcentages d'augmentation ou de diminution, une mise en évidence similaire peut être faite; par exemple, augmenter de 5% c'est multiplier par 1,05 et diminuer de 5% c'est multiplier par 0,95.

L'étude de la fonction linéaire est aussi une occasion d'utiliser la notion d'image. On introduira la notation  $x \rightarrow ax$  pour la fonction.

A propos de la notation des images  $f(2)$ ,  $f(-0,25)$ ... , on remarquera que les parenthèses  $y$  ont un autre statut qu'en calcul algébrique.

L'énoncé de Thalès permet de démontrer que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine ; cette droite a une équation de la forme  $y=ax$ . On interprétera graphiquement le nombre  $a$ , coefficient directeur de la droite.

C'est une occasion de prendre conscience de l'existence de fonctions dont la représentation graphique n'est pas une droite (par exemple, en examinant comment varie l'aire d'un carré quand la longueur de son côté varie de 1 à 3).

Pour des valeurs de  $a$  et  $b$  numériquement fixées, le processus de correspondance sera aussi explicité sous la forme

« je multiplie par  $a$ , puis j'ajoute  $b$  ».

La représentation graphique de la fonction affine peut être obtenue par une translation à partir de celle de la fonction linéaire associée. C'est une droite qui a une équation de la forme  $y=ax+b$ .

On interprétera graphiquement le coefficient directeur  $a$  et l'ordonnée à l'origine; on remarquera la proportionnalité des accroissements de  $x$  et de  $y$ .

Pour déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère, on entraînera les élèves à travailler à partir de 2 points pris sur la droite et à exploiter la représentation graphique. On fera remarquer qu'une fonction linéaire est une fonction affine.

Des enregistrements graphiques ou des courbes représentatives de fonctions non affines peuvent servir de support à la construction de tableaux de valeurs ou à la recherche de particularités d'une fonction: coordonnées de points, sens de variation sur un intervalle donné, maximum, minimum. Aucune connaissance spécifique n'est exigible sur ce sujet.

En classe de troisième, il s'agit de compléter l'étude de la proportionnalité commencée de fait dès l'école. De nombreuses occasions sont données de conjecturer ou de reconnaître, puis d'utiliser la proportionnalité de valeurs ou d'accroissements dans les différents domaines et sections du programme. Les situations mettant en jeu les grandeurs restent privilégiées pour mettre en place et organiser les calculs faisant intervenir la proportionnalité, en particulier les pourcentages. Par exemple, au delà des compétences exigibles, on pourra étudier les problèmes de mélange.

Les grandeurs produits sont, après les grandeurs quotients déjà rencontrées en classe de quatrième, les grandeurs composées les plus simples. On pourra remarquer que les aires et les volumes sont des grandeurs produits. D'autres grandeurs produits et grandeurs dérivées pourront être utilisées : passagers  $\times$  km, kWh, euro/kWh, ...

En liaison avec les autres disciplines (physique, chimie, éducation civique...), on attachera de l'importance à l'écriture correcte des symboles et à la signification des résultats numériques obtenus.

## **Fonctions:**

Jusqu'à la fin du cycle central, la notion de fonction n'a été utilisée que de manière implicite. Les transformations géométriques étudiées n'ont pas été présentées comme application du plan dans lui-même. Le travail sur la proportionnalité, et plus largement sur l'étude de relations entre données numériques, a permis d'utiliser des formules, des tableaux de nombres et des représentations dans le plan muni d'un repère, en particulier comme outils pour résoudre des problèmes. Ainsi, à l'occasion du traitement de situations numériques ou géométriques, les élèves ont été amenés à passer d'un langage à un autre (par exemple, d'une formule ou d'un graphique à un tableau de nombres). Mais, si des expressions telles que «en fonction de» ou «est fonction de» ont été utilisées, les fonctions numériques associées à ces formules, à ces tableaux ou à ces représentations n'ont pas été explicitées.

La classe de 3ème est donc l'occasion du premier véritable contact des élèves avec cette notion de fonction, dans sa conception actuelle qui fait correspondre à tout élément d'un ensemble un élément d'un autre ensemble. Mais il ne s'agit pas de donner une définition générale de la notion de fonction. Le travail est limité à l'étude de fonctions particulières : les fonctions linéaires et affines. D'autres exemples de fonctions simples seront également utilisés, en particulier pour montrer que toute représentation graphique ne se réduit pas à un ensemble de points alignés (par exemple, en représentant quelques points d'une fonction telle que  $x \rightarrow x^2$ , sur un intervalle). Au lycée, la notion de fonction occupera une place centrale, dans le cadre de l'enseignement de l'analyse.

La notion de fonction linéaire permet, en 3 e , d'opérer une synthèse des différents aspects de la proportionnalité rencontrés tout au long du collège et de les exprimer dans un nouveau langage. Toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire. Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction (définie, elle, sur l'ensemble des réels) dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

La fonction linéaire doit apparaître comme un cas particulier de la fonction affine, cette dernière étant associée à la proportionnalité des accroissements.

L'apprentissage des langages permettant de traduire les relations fonctionnelles doit faire l'objet d'une attention toute particulière. La notation  $x \rightarrow ax$  ne sera introduite que pour des valeurs particulières de  $a$ , en liaison avec le coefficient de proportionnalité et d'expressions verbales du type « Pour passer d'un nombre à son image, je multiplie par  $a$  ».

La notation  $f(x)$  est également introduite pour des valeurs particulières de la variable (du type  $f(2)$ ,  $f(-3)$ ,...), mais on veillera à différencier avec les élèves le statut des parenthèses dans ce type de notation de leur signification dans un calcul algébrique. Les notations fonctionnelles amènent à utiliser des lettres avec une nouvelle signification : successivement, au collège, les lettres ont ainsi été utilisées de façon « expressive » en référence à des grandeurs (comme dans la formule de l'aire du rectangle), pour désigner des valeurs inconnues (dans les équations), des valeurs indéterminées (dans les identités remarquables, par exemple) et enfin des variables (dans le langage des fonctions). Les difficultés à comprendre le statut différent des lettres, et du signe  $=$ , dans ces différents contextes justifient le fait que la notion d'équation de droite ne soit pas abordée au collège.

Le travail sur des situations modélisables par des fonctions classiques est l'occasion de formuler un même problème dans différents cadres et d'habituer les élèves à passer d'un cadre à l'autre, pour interpréter des résultats ou des propriétés : formules, tableaux de nombres, fonctions, représentations graphiques. C'est en particulier ce qui permettra d'utiliser une représentation graphique pour la résolution d'un système d'équations à deux inconnues.