

Arithmétique

I. RAPPELS : LES ENSEMBLES DE NOMBRES :

1) Les entiers naturels :

Ce sont les nombres que l'on peut compter sur ses doigts.
ex : 0 ; 1 ; 2 ...

2) Les entiers relatifs :

Ce sont les entiers naturels et leurs opposés.
ex : ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ...

3) Les nombres rationnels :

Ce sont les résultats des divisions de 2 nombres entiers relatifs.

Si la division tombe juste, on les appelle aussi " décimaux ".
ex : = 0,5

Certains rationnels sont négatifs.
ex :- = -0,66666....

4) Les nombres irrationnels :

ex : pi, racine de 2

II. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX NOMBRES :

A. Définition 1

a et k étant deux entiers naturels tel que k soit différent de 0. Lorsque a/k est un entier naturel, on dit que k est un diviseur de a. (c'est à dire quand le reste de la division euclidienne de a par k est zéro)

(On dit aussi que a est un multiple de k, ou encore que a est divisible par k)

Exemples : $18 = 2 \times 9$

2 est un diviseur de 18.

9 est un autre diviseur de 18.

B. Définition 2

Si deux entiers naturels a et b sont divisibles par un même entier naturel k , on dit que k est un diviseur commun de a et b .

Exemple :

$36=12 \times 3$ et $24=12 \times 2$, donc 12 est un diviseur de 36 et 24.

$36=8 \times 4,5$ et $24=8 \times 3$, donc 8 n'est pas un diviseur commun de 36 et 24 car il ne divise pas 36.

Remarque : 1 est un diviseur commun à tous les nombres.

C. Notation

Si a et b désignent deux nombres entiers relatifs, on note $\text{PGCD}(a ; b)$ le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b .

Exemple :

La liste des diviseurs de 24 est :
{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24 }

La liste des diviseurs de 36 est :
{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36. }

24 et 36 ont 6 diviseurs communs :
{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12. }

Le plus grand d'entre eux est 12, c'est le plus grand diviseur commun de 24 et 36.

On note $\text{PGCD}(24 ; 36) = \text{PGCD}(36 ; 24) = 12$.

III. ALGORITHMES DE RECHERCHE DU PGCD :

a. Algorithme des différences :

pour déterminer $\text{PGCD}(295 ; 177)$, on effectue les soustractions successives :

$$295-177=118$$

$$177-118=59$$

$$118-59=59$$

- * On prend les deux nombres et on les soustrait.
- * On prend les deux plus petits et on recommence.
- * On s'arrête lorsque l'on obtient deux nombres égaux.

Propriété :

Le plus grand diviseur commun est le dernier reste non nul dans la succession des différences de l'algorithme.

b. l'algorithme d'Euclide.

Pour déterminer PGCD(252 ; 360) :

*

- * Effectuer la division euclidienne du plus grand des deux nombres par le plus petit :

$$360 = 252 \times 1 + 108$$

- * Effectuer la division euclidienne du diviseur par le reste de la division précédente, jusqu'à ce que le reste de la division soit égal à 0.

$$252 = 108 \times 2 + 36$$

$$108 = 36 \times 3 + 0$$

Le plus grand diviseur commun est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide.(ici 36)

IV. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX. FRACTIONS IRREDUCTIBLES :

A. Nombres premiers entre eux :

On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

Exemples :

1) 10 et 7 sont premiers entre eux ; en effet :

les diviseurs positifs de 10 sont 1, 2, 5 et 10,
les diviseurs positifs de 7 sont 1 et 7,
donc $\text{PGCD}(10 ; 7) = 1$ et 10 et 7 sont premiers entre eux.

2) 221 et 69 sont premiers entre eux ; en effet :
en appliquant l'algorithme d'Euclide,
 $221 = 69 \times 3 + 14$
 $69 = 14 \times 4 + 13$
 $14 = 13 \times 1 + 1$
 $13 = 1 \times 13 + 0$

donc $\text{PGCD}(221 ; 69) = 1$.

B. Fraction irréductible :

On dit qu'une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemples : $\text{PGCD}(10 ; 7) = 1$ donc $10/7$ est une fraction est irréductible.

C. Propriété :

Lorsque l'on simplifie une fraction par le plus grand diviseur commun à son numérateur et son dénominateur, la fraction obtenue est irréductible.

Exemples :

On sait que $\text{PGCD}(252 ; 360) = 36$ donc : $\frac{252}{360} = \frac{7}{10}$ est une fraction est irréductible.

OFFICIEL:

COMPETENCES EXIGIBLES

Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.

Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

COMMENTAIRES

Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves.

Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non.

On remarque que la somme et la différence de 2 multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui donnant le PGCD de 2 nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas.

Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit.

A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et racine de 2 . On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de racine de 2 . Une telle étude peut également mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.