Géométrie dans l'espace

première partie

I Perspective

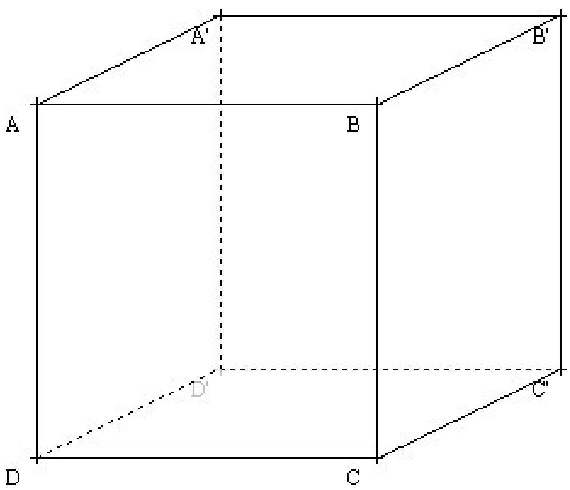
A Le point de vue de l'artiste

La cité idéale (1475), Piero della Francesca

La **perspective** est l'art de représenter les objets à trois dimensions sur une surface plane, en tenant compte des effets de l'éloignement et de leur position dans l'espace par rapport à l'observateur.

Pour l'artiste, certaines droites parallèles dans la réalité sont représentées comme des droites sécantes.

B Le point de vue mathématique, la perspective cavalière



Par contre, en perspective cavalière, les parallèles dans la réalité sont représentées par des droites parallèles.

Par convention, on représente les arêtes invisibles en pointillés.

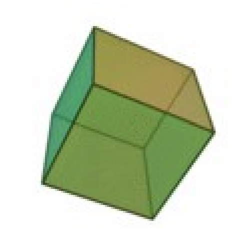
Ainsi la face au premier plan est, dans ce cube, le carré ABCD.

II Merci Patron

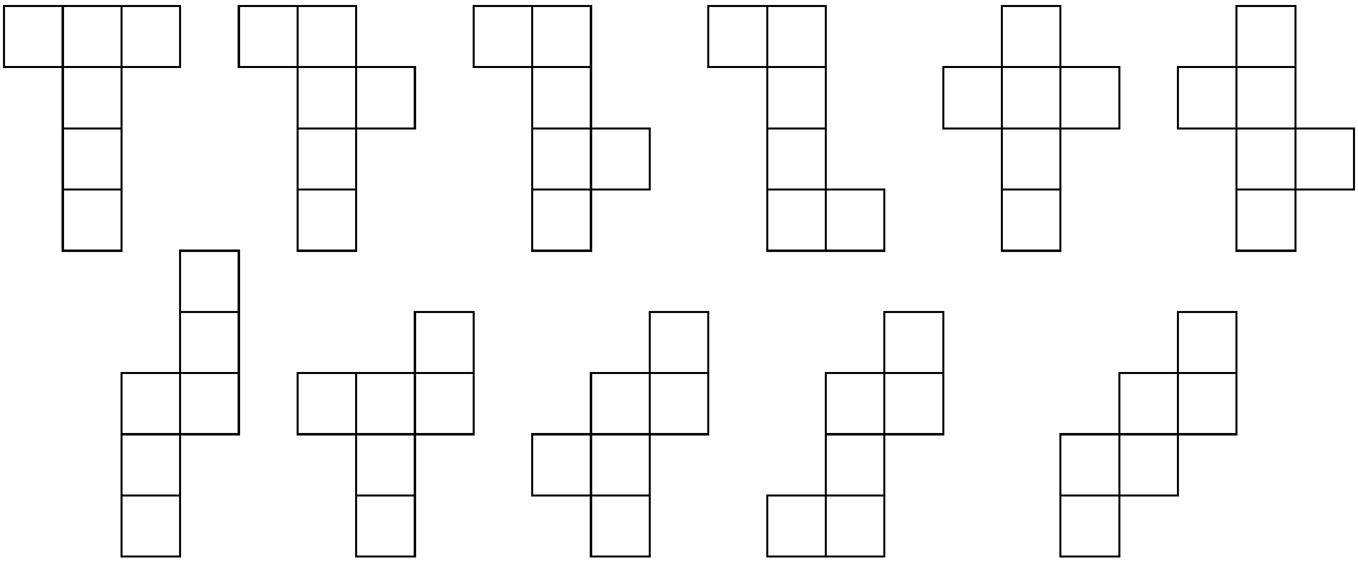
Merci patron
Merci patron
Quel plaisir de travailler pour vous
On est heureux comme des fous

Chantaient Les charlots...

A Une représentation plane: le patron



Dessiner les 11 patrons d'un cube:



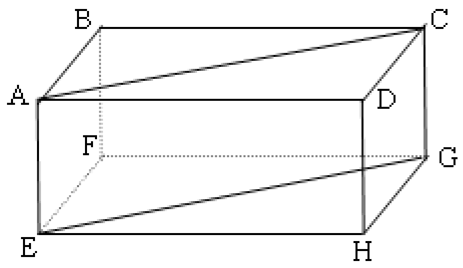
B Définitions

patron

(nom masculin)
Modèle pour la broderie, la tapisserie, pour fabriquer un objet.• Pochoir pour le coloriage.• Papier découpé servant de modèle pour tailler un vêtement.

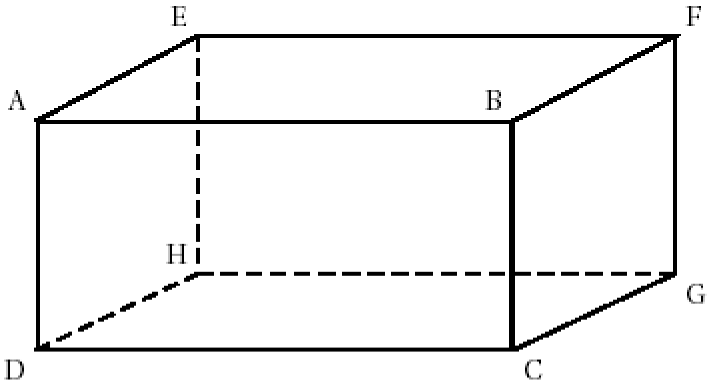
III Exemples d'exercices classiques au brevet

A Brevet 2004 Aix-Marseille



Quel est la nature des polygones suivants?
triangle ABC
triangle ABC
quadrilatère ABFE
triangle ACG
quadrilatère ACGE

B Brevet 2005 Aix-Marseille



ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. On donne AE = 3 m; AD = 4 m; AB = 6 m.

1. a) Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ? Le justifier.
b) Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?

2. a) Calculer EG. On donnera la valeur exacte.
b) En considérant le triangle EGC rectangle en G, calculer la valeur exacte de la longueur de la diagonale [EC] de ce parallélépipède rectangle.

3. Montrer que le volume de ABCDEFGH est égal à 72 m³.
Montrer que l'aire totale de ABCDEFGH est égale à 108 m².

C Remarque

Ainsi les exercices classiques de l'espace ne sont que des exercices habituels. Il s'agit de trouver le plan dans lequel on travaille!

Deuxième partie

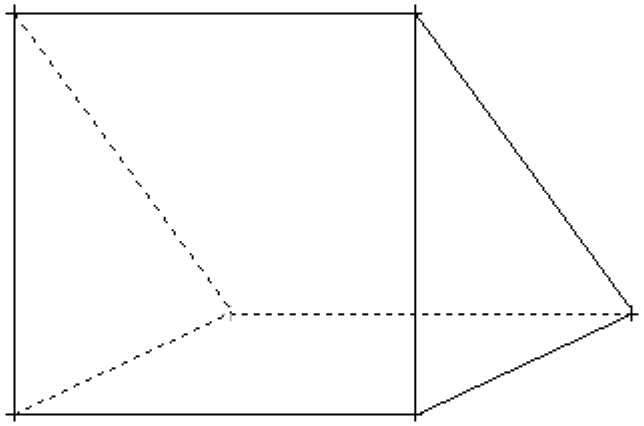
I Les solides « sans pointe »

A. Les prismes droits

1 Définition

On appelle prisme droit un solide dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des rectangles.

2 Exemples

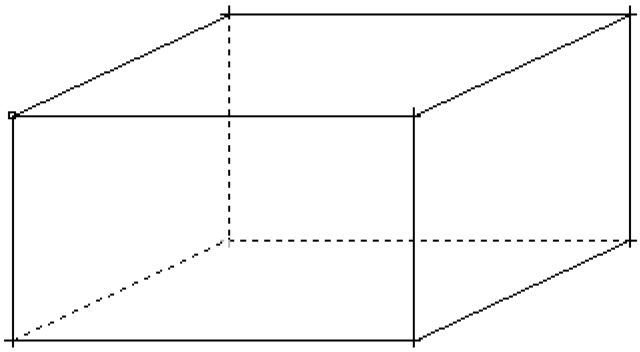


Le solide ci-contre est un prisme droit à base triangulaire:

Il a 6 sommets, 9 arêtes, et 5 faces.

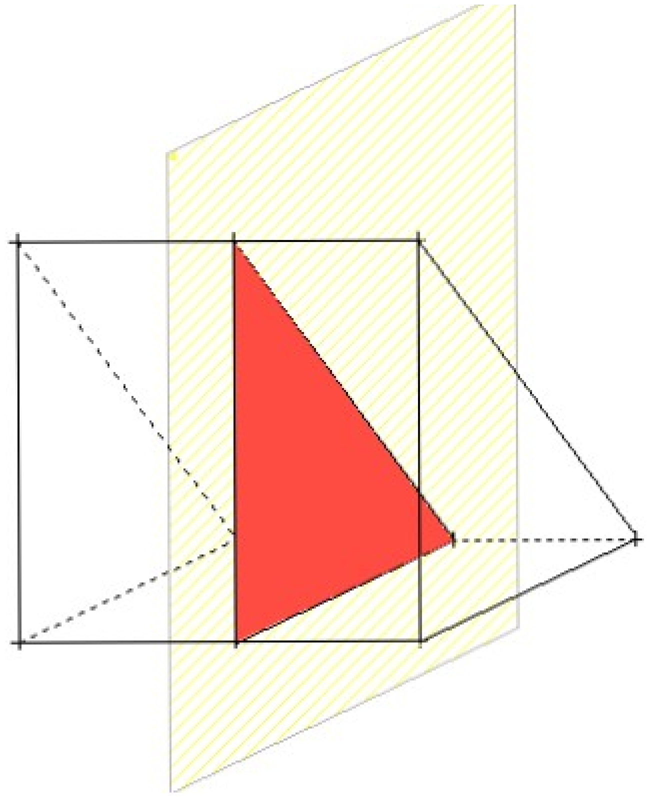
Le solide ci-contre est un prisme droit à base rectangulaire:

Il a 8 sommets, 12 arêtes, et 6 faces.

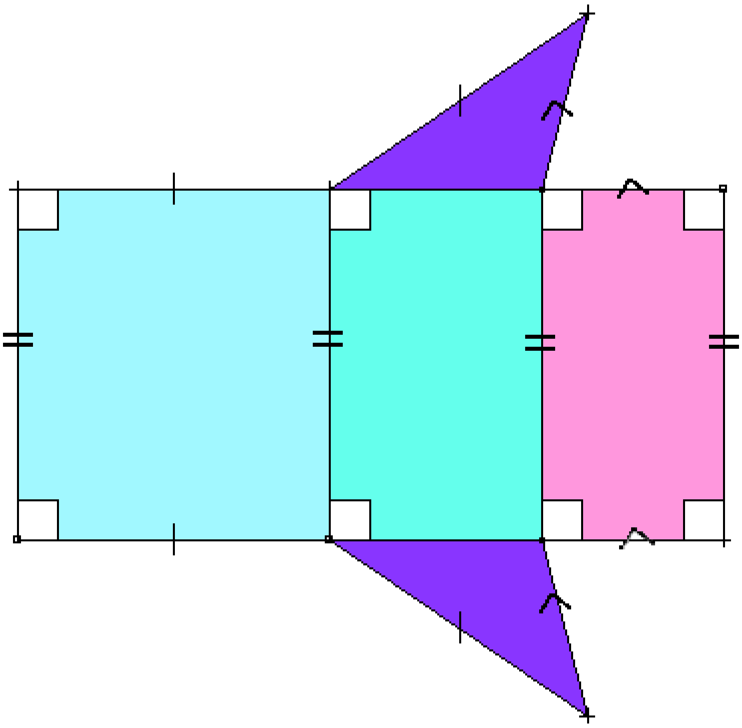


3 Sections par un plan parallèle à la base:

Quand on coupe un prisme droit par un plan parallèle à la base, la section trouvée est identique à la base:



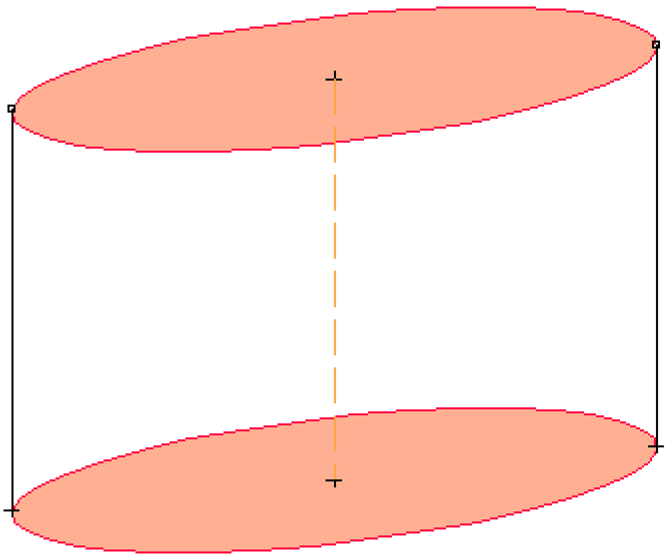
4 patrons



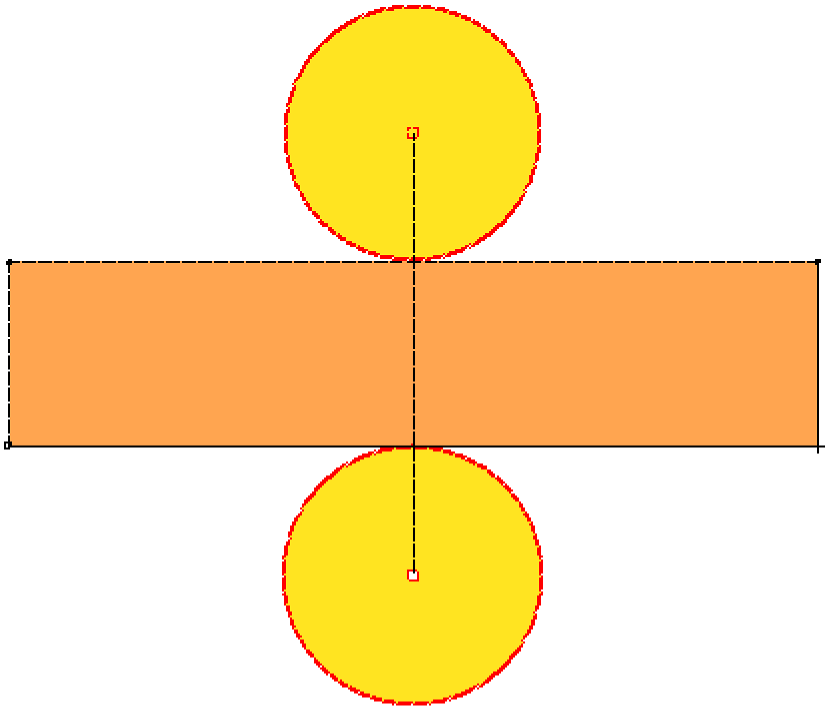
5 Volumes

$$V = Bh$$ où B désigne l'aire de la base et h la hauteur du prisme

B Cylindre de révolution

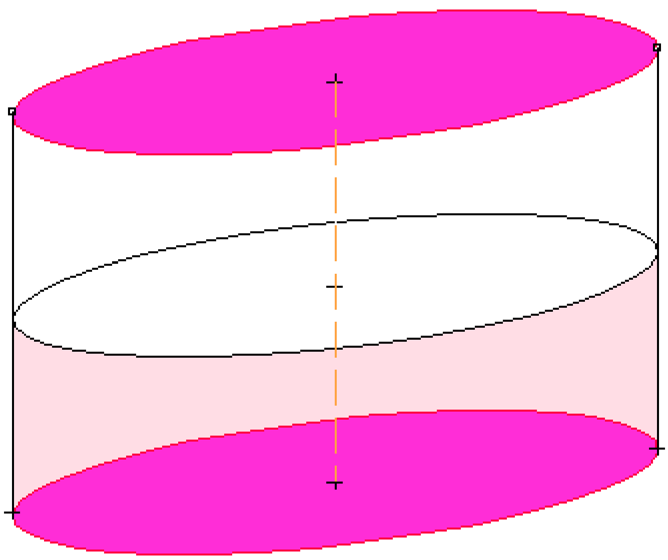


patron:

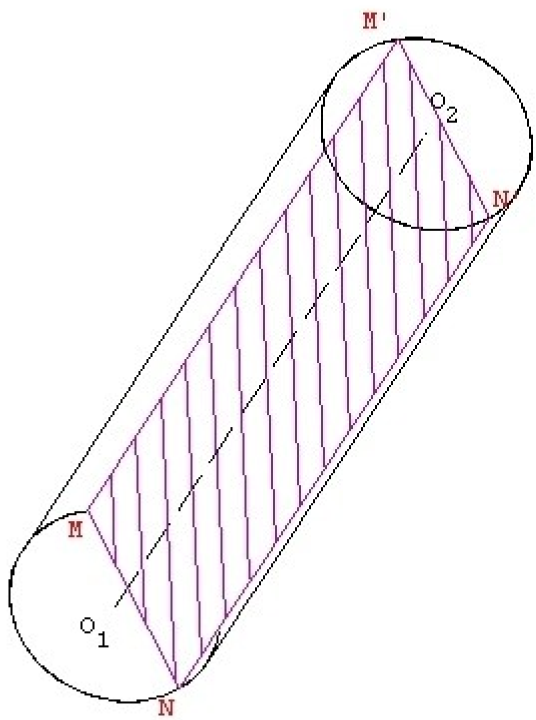


Section par un plan:

Quand on coupe un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base, la section trouvée est un cercle de même rayon que celui de la base.:



Quand on coupe un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à la base, la section trouvée est un rectangle dont un côté est égal à la hauteur du cylindre.



Volume:

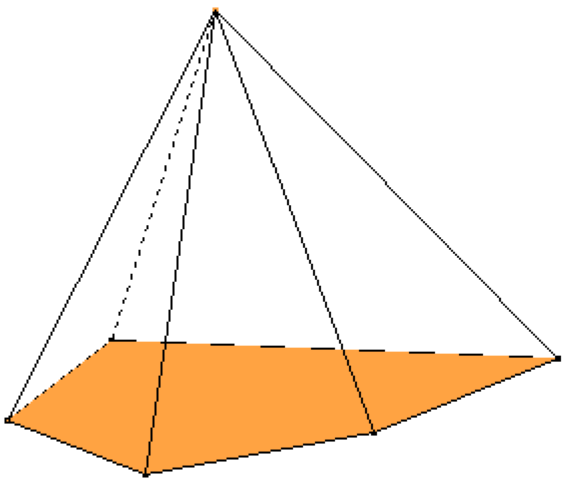
Comme pour le prisme droit (solide « sans pointe ») la formule est donnée par:

$$V = Bh$$ soit ici:

$$V = \pi \times r^2 \times h$$

III Les solides pointus

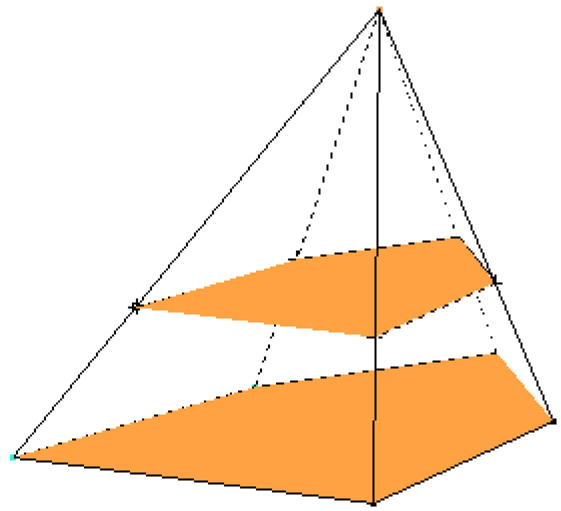
A Pyramides



Les pyramides ont pour base des polygones, et leurs faces latérales sont des triangles.

Remarques :

Quand on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, la section trouvée est de même nature que celle de la base:



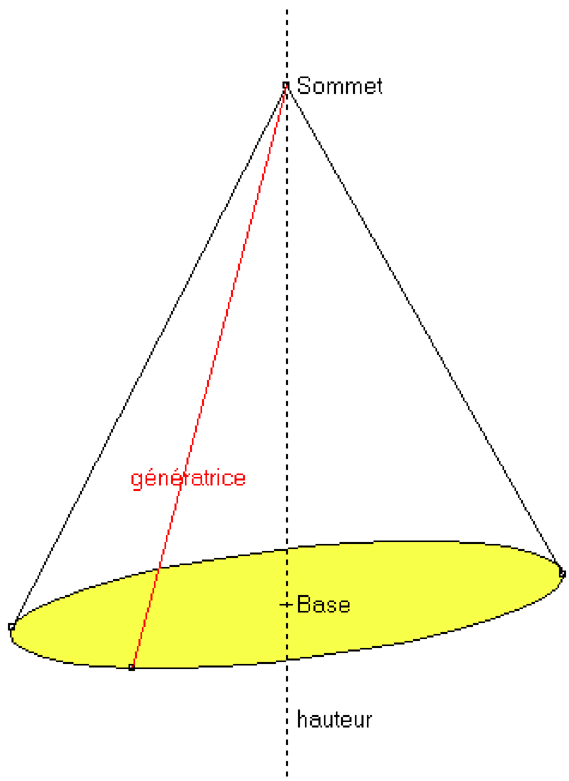
Les pyramides régulières ont pour base des polygones réguliers:

- triangle équilatéral
- carré,...

et leurs faces latérales sont des triangles isocèles.

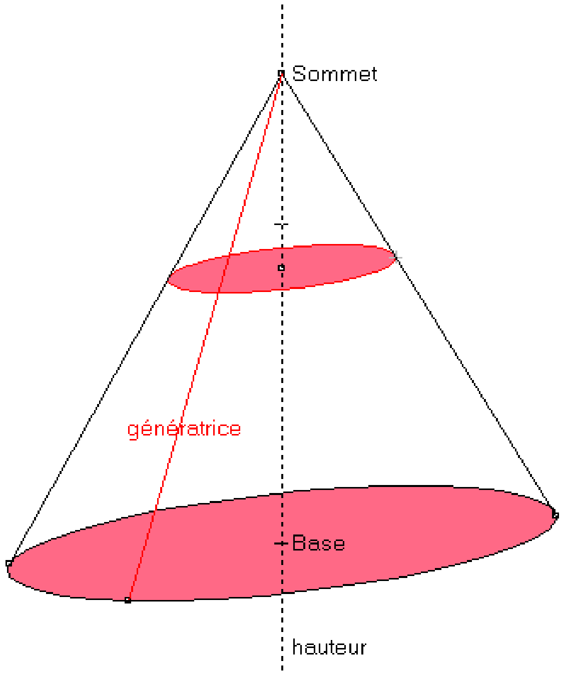
Volume de la pyramide: $$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

B Cône de révolution :



Remarque :

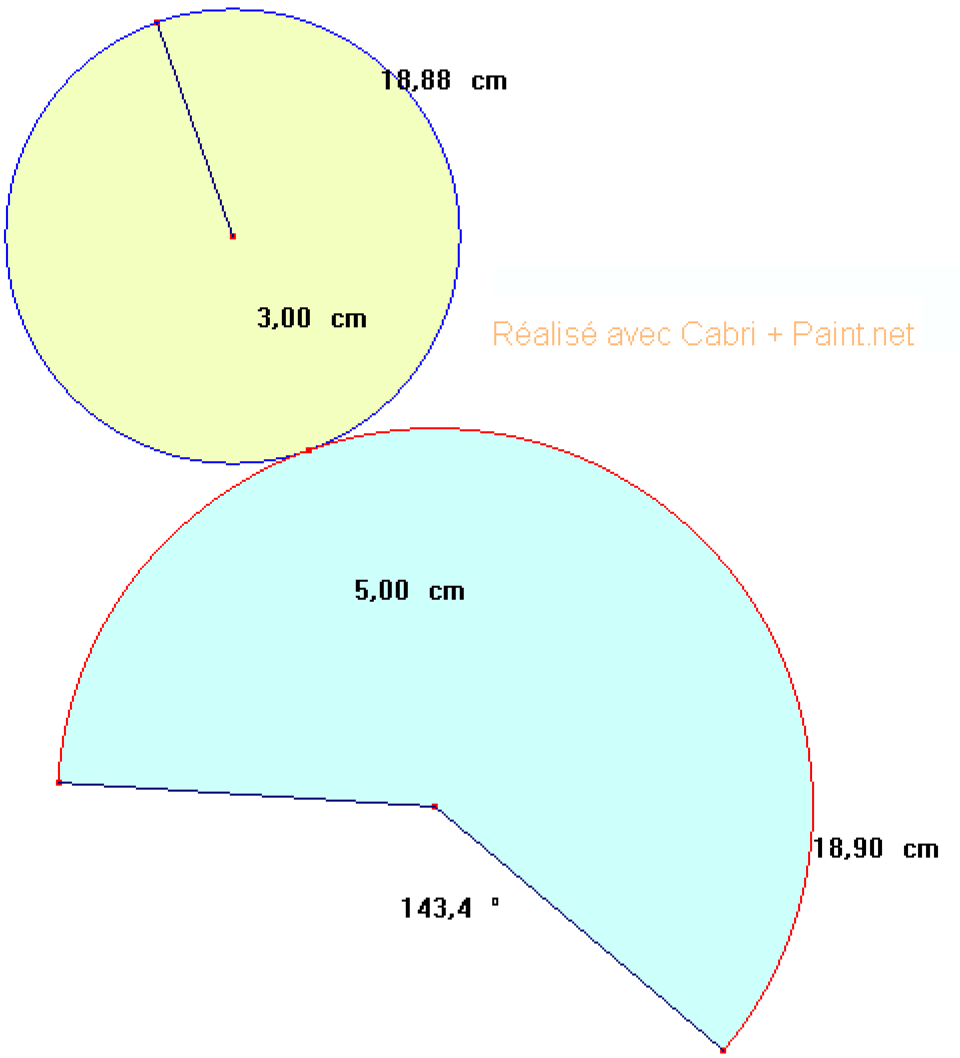
Quand on coupe un cône par un plan parallèle à la base, la section trouvée est un cercle de rayon inférieur à celui de la base.



Patron:

Tracer le patron d'un cône de révolution dont le base est un cercle de 3cm de rayon, et de hauteur 4cm.

Indice: La longueur de l'arc de cercle est égale à la circonférence du cercle de base



Volume du cône de rayon r et de hauteur h :

$$V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} \pi \times r^2 \times h$$

III La Sphère, la boule.

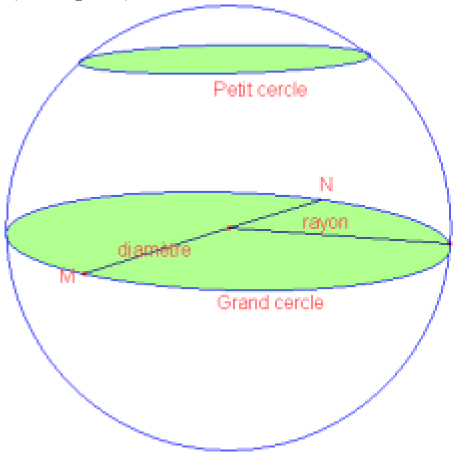
A Définitions

Dans un plan donné le cercle de centre O et de rayon r cm est constitué de tous les points à exactement r cm de O.

Dans un plan donné le disque de centre O et de rayon r cm est constitué de tous les points dont la distance à O est inférieure (ou égale) à r cm.

La sphère de centre O et de rayon r cm est constituée de tous les points de l'espace à exactement r cm de O.

La boule de centre O et de rayon r cm est constituée de tous les points de l'espace dont la distance à O est inférieure (ou égale) à r cm.



M et N sont diamétralement opposés

Remarques :

On ne peut pas construire le patron d'une sphère.

La section d'une sphère de centre O et de rayon R, par un plan est un cercle.

- Si le plan passe par O, le cercle a pour rayon R
- Sinon, son rayon r est inférieur à R

Aire et volume

Aire de la sphère :

$$A = 4\pi R^2$$

Volume de la boule :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Instructions officielles

CONTENUS

- Géométrie dans l'espace .
- Sphère
- Problèmes de sections planes de solides.
- Calculs d'aires et de volumes.

COMPETENCES EXIGIBLES

Savoir que la section d'une sphère par un plan est un cercle.
Savoir placer le centre de ce cercle et calculer son rayon connaissant le rayon de la sphère et la distance du plan au centre de la sphère.
Représenter une sphère et certains de ses grands cercles.
Connaître la nature des sections du cube, du parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face, à une arrête.
Connaître la nature des sections du cylindre de révolution par un plan parallèle ou perpendiculaire à son axe.
Représenter et déterminer les sections d'un cône de révolution et d'une pyramide par un plan parallèle à la base.
Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné.

COMMENTAIRES

On mettra en évidence les grands cercles de la sphère, les couples de points diamétralement opposés. On examinera le cas particulier où le plan est tangent à la sphère.
On fera le rapprochement avec les connaissances que les élèves ont déjà de la sphère terrestre, notamment pour les questions relatives aux méridiens et parallèles.

Des manipulations préalables (sections de solides en polystyrène par exemple) permettent de conjecturer ou d'illustrer la nature des sections planes étudiées.
Ce sera une occasion de faire des calculs de longueur et d'utiliser les propriétés rencontrées dans d'autres rubriques ou les années antérieures.

A propos de pyramides, les activités se limiteront à celles dont la hauteur est une arrête latérale et aux pyramides régulières qui permettent de retrouver les polygones étudiés par ailleurs.

Le travail avec un formulaire qui n'exclut pas la mémorisation, permettra le réinvestissement et l'entretien d'acquis des années précédentes :
aire des surfaces et volumes, des solides étudiées dans ces classes.

Des activités de comparaison d'aires, d'une part, et de volume, d'autre part, seront autant d'occasions de manipulations de formules et de transformations d'expressions algébriques.
Ce travail prend appui sur celui fait en géométrie dans l'espace.