Géométrie dans l'espace

première partie

I. Perspective

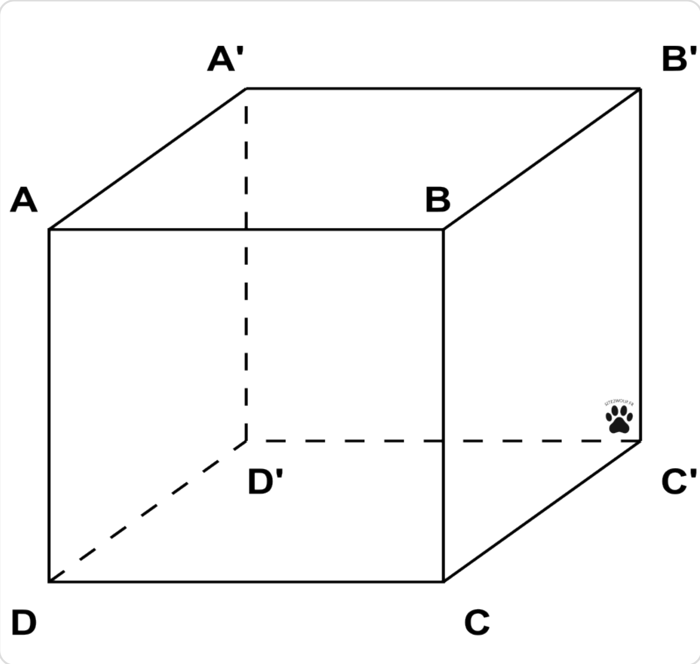
A. Le point de vue de l'artiste

La cité idéale (1475), Piero della Francesca

La perspective est l'art de représenter les objets à trois dimensions sur une surface plane, en tenant compte des effets de l'éloignement et de leur position dans l'espace par rapport à l'observateur. Pour l'artiste, certaines droites parallèles dans la réalité sont représentées comme des droites sécantes.

B. Le point de vue mathématique, la perspective cavalière

Par contre, en perspective cavalière, les parallèles dans la réalité sont représentées par des droites parallèles :



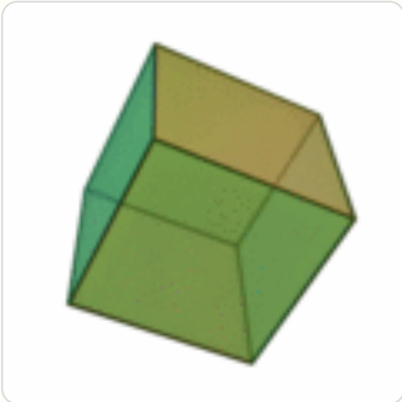
Par convention, on représente les arêtes invisibles en pointillés.

Ainsi la face au premier plan est, dans ce cube, le carré ABCD.

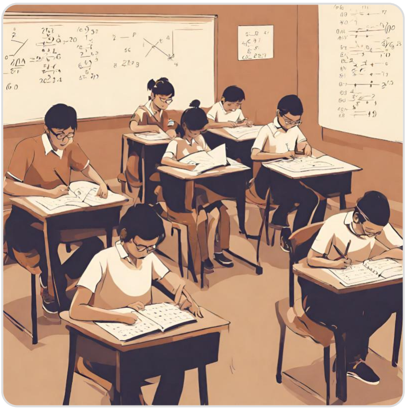
II. Merci Patron

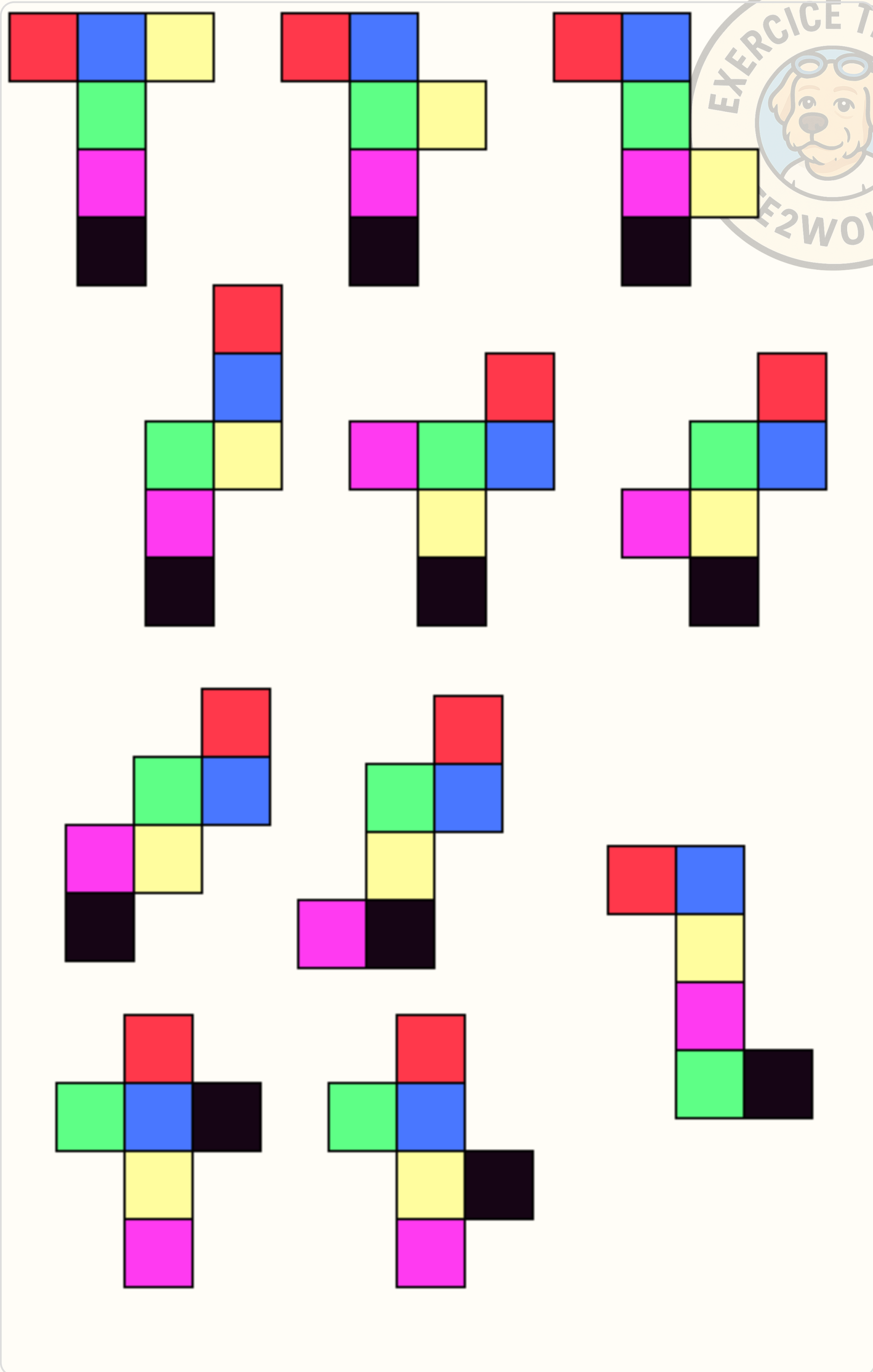
Merci patron
Merci patron
Quel plaisir de travailler pour vous
On est heureux comme des fous ♬
Chantaient Les Charlots...

A. Une représentation plane: le patron



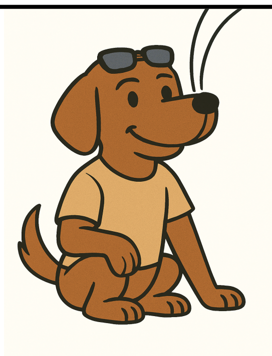
Dessiner les 11 patrons d'un cube.





Domaine : Espace et géométrie

- Représenter un solide en trois dimensions par son patron.
- Distinguer des patrons corrects de patrons incorrects.
- Reconnaitre des figures planes pouvant être assemblées pour former un cube.



Notes :

B. Définitions

Patron:

(nom masculin)

Modèle pour la broderie, la tapisserie, pour fabriquer un objet. Pochoir pour le coloriage. Papier découpé servant de modèle pour tailler un vêtement.

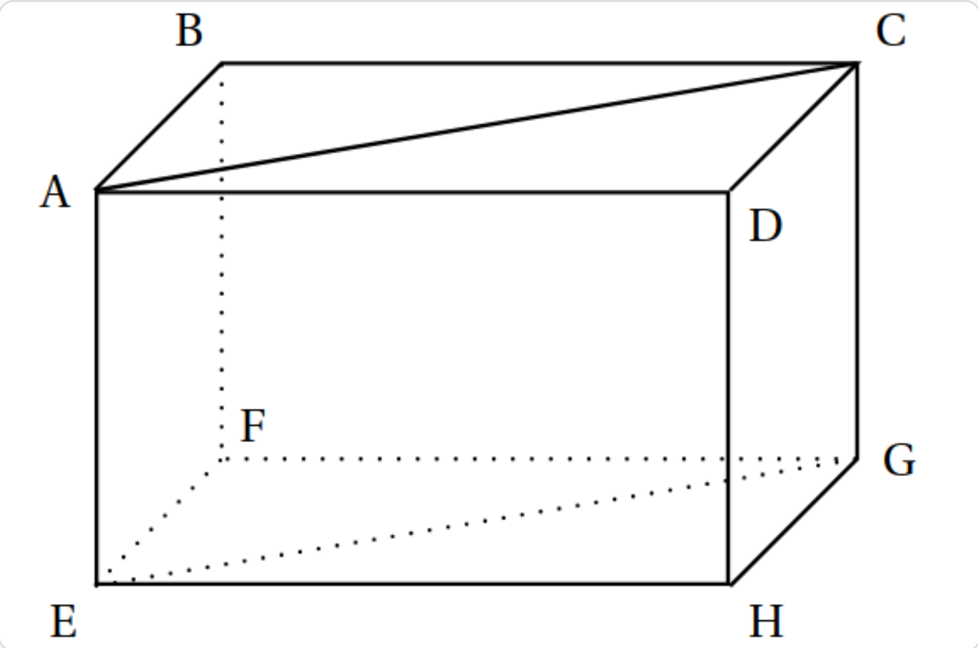
Patron d'un solide :

Un patron d'un solide est une figure plane composée de polygones (appelés faces) qui sont disposés de telle manière qu'en les pliant le long de leurs arêtes communes, on peut reconstituer le solide en trois dimensions sans que les faces ne se chevauchent.

III. Exemples d'exercices classiques au brevet

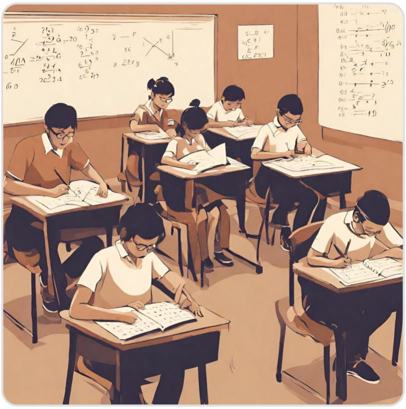
A. Brevet 2004 Aix-Marseille

On considère le pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous (figure non à l'échelle).



Observer la figure, recopier et compléter le tableau suivant (sans justification) :

Objet	*Nature*
Triangle ABC	...
Angle $\widehat{ABF}$	...
Quadrilatère ABFE	...
Angle $\widehat{ACG}$	...
Quadrilatère ACGE	...



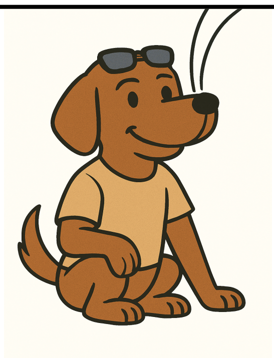
Correction

Objet	Nature
Triangle ABC	Rectangle
Angle $\widehat{ABF}$	Droit
Quadrilatère ABFE	Rectangle
Angle $\widehat{ACG}$	Droit
Quadrilatère ACGE	Rectangle

Notes :

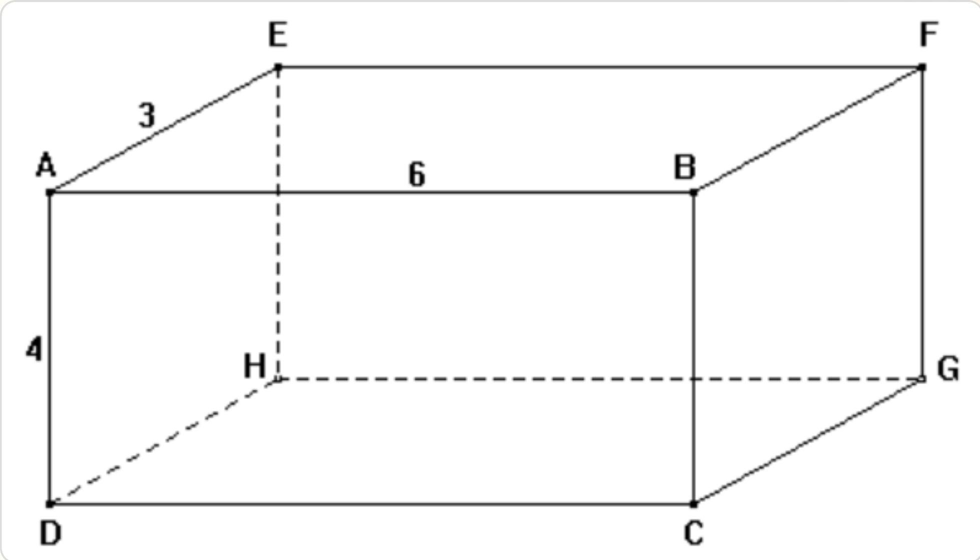
Domaine : Espace et géométrie

- Identifier la nature d'une figure dans l'espace.
- Utiliser le vocabulaire géométrique pour décrire une figure (angle, rectangle, etc.).
- Lire une représentation plane d'une figure en perspective.

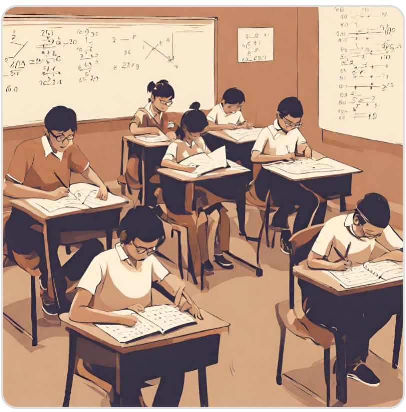


B. Brevet 2005 Aix-Marseille

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. On donne AE = 3 m; AD = 4 m; AB = 6 m.



1. 1. **Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ? Le justifier.**
   2. **Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?**
2. 1. **Calculer EG. On donnera la valeur exacte.**
   2. **En considérant le triangle EGC rectangle en G, calculer la valeur exacte de la longueur de la diagonale [EC] de ce parallélépipède rectangle.**
3. 1. **Montrer que le volume de ABCDEFGH est égal à 72 m^3.**
   2. **Montrer que l'aire totale de ABCDEFGH est égale à 108 m^2.**



1. 1. *Le solide ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle, donc toutes ses faces sont des rectangles (en particulier ABFE) et ses arêtes sont perpendiculaires deux à deux.*

   On a donc

$$(AE) \perp (AB)$$

   2. *Les droites (EH) et (AB) ne sont pas coplanaires (Pas dans le même plan).*
   Donc (EH) et (AB) ne sont pas sécantes.

2. 1. *Dans EFG rectangle en F, d'après le théorème de Pythagore:*

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

$$EG^2 = 6^2 + 4^2$$

$$EG^2 = 36 + 16$$

$$EG^2 = 52$$

$$EG = \sqrt{52}\ m = 2\sqrt{13}\ m$$

   2. *Dans EGC rectangle en G, d'après le théorème De Pythagore:*

$$EC^2 = EG^2 + GC^2$$

$$EG^2 = 52 + 3^2$$

$$EG^2 = 52 + 9$$

$$EG^2 = 61$$

$$EG = \sqrt{61}\ m$$

3\. 1.

$$V = 3 \times 4 \times 6 = 72\ m^3$$

2\.

$$A = 2 \times (3 \times 4 + 3 \times 6 + 4 \times 6)$$

$$A = 2 \times (12 + 18 + 24) = 2 \times 54 = 108\ m^2$$

Espace et géométrie

- Appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle.
- Distinguer droites parallèles, perpendiculaires ou non coplanaires.
- Justifier une propriété géométrique dans l'espace.

Grandeurs et mesures

- Calculer un volume ou une aire à partir de dimensions.

💡REMARQUE

C. Remarque

> *Ainsi les exercices classiques de l'espace ne sont que des exercices habituels. Il s'agit de trouver le plan dans lequel on travaille!*

Notes :

Deuxième partie

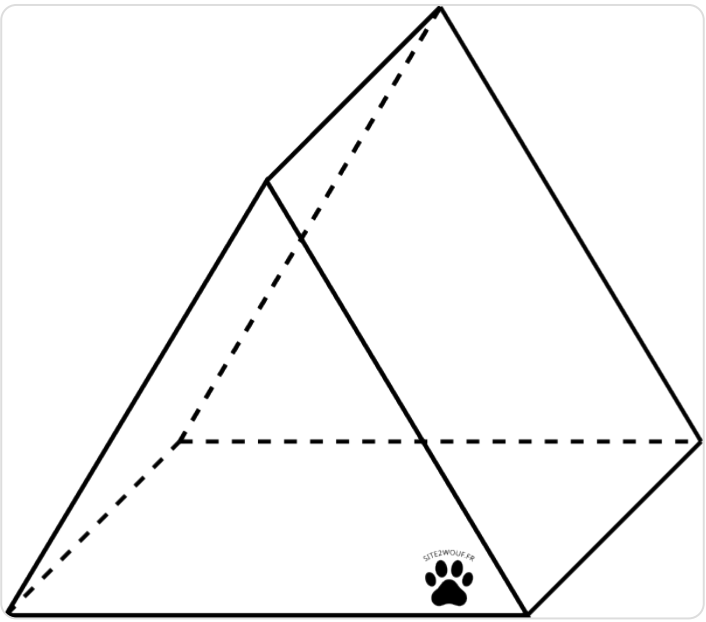
I. Les solides "sans pointe"

A. Les prismes droits

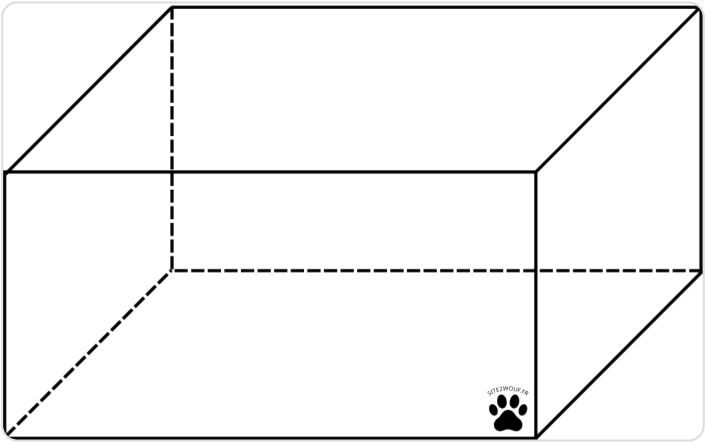
1. Définition

> On appelle prisme droit un solide dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des rectangles.

2. Exemples



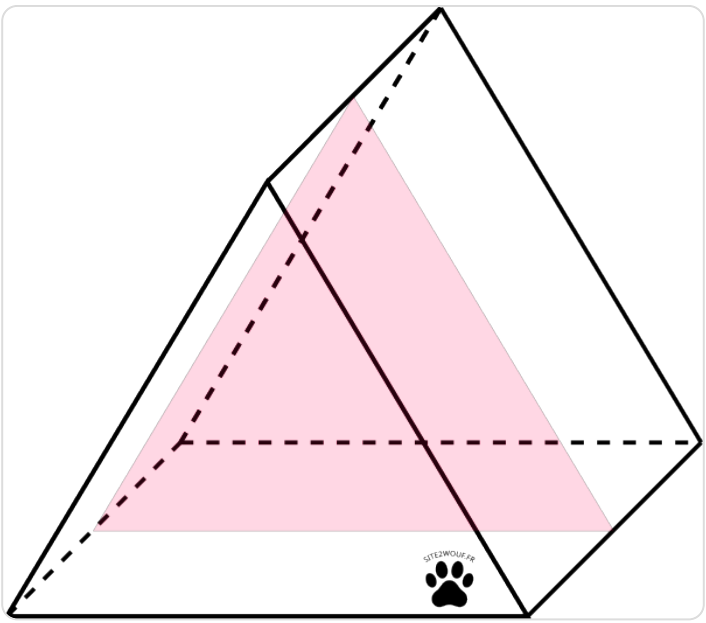
> Le solide ci-dessus est un prisme droit à base triangulaire: Il a 6 sommets, 9 arêtes, et 5 faces.



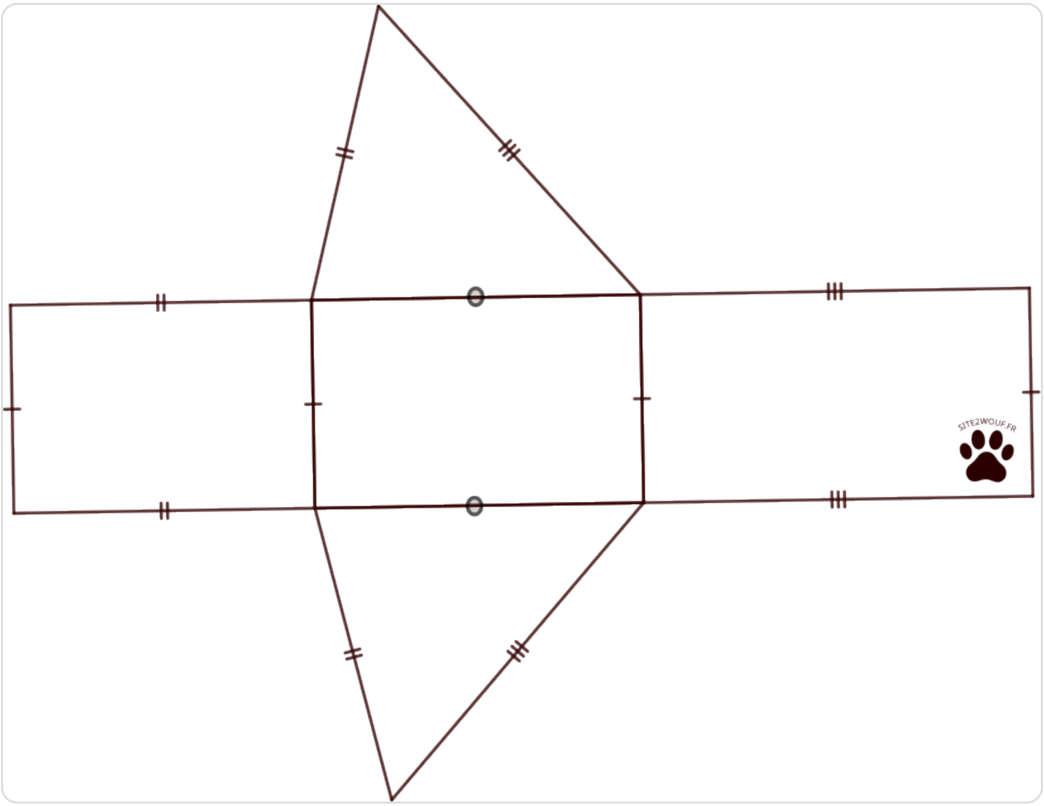
Le solide ci-dessus est un prisme droit à base rectangulaire: Il a 8 sommets, 12 arêtes, et 6 faces.

3. Sections par un plan parallèle à la base:

Quand on coupe un prisme droit par un plan parallèle à la base, la section trouvée est identique à la base:



4. patrons

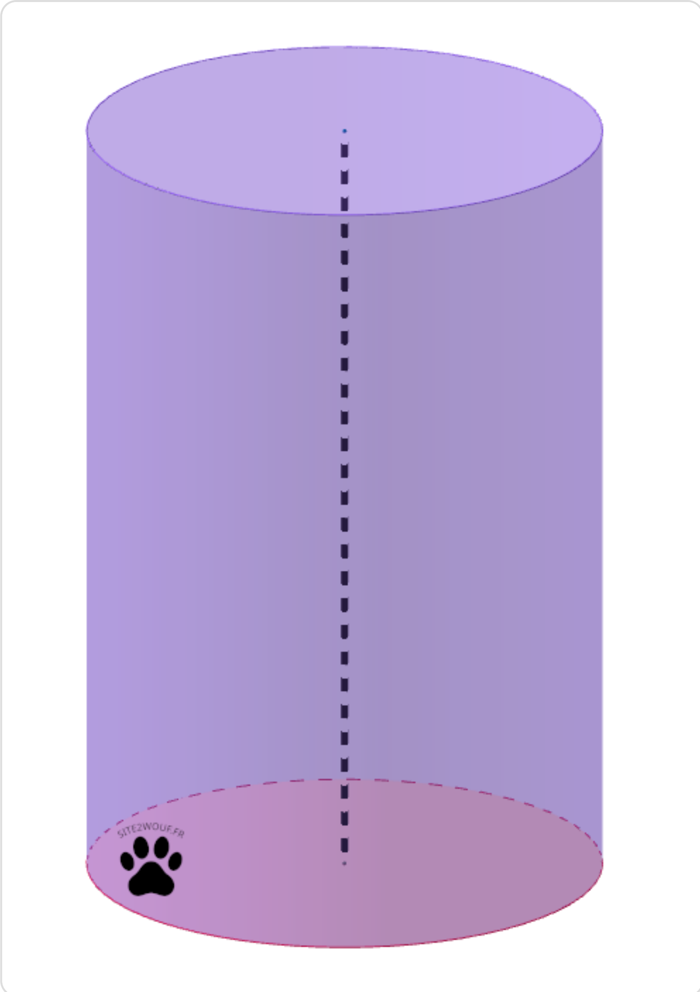


5. Volumes

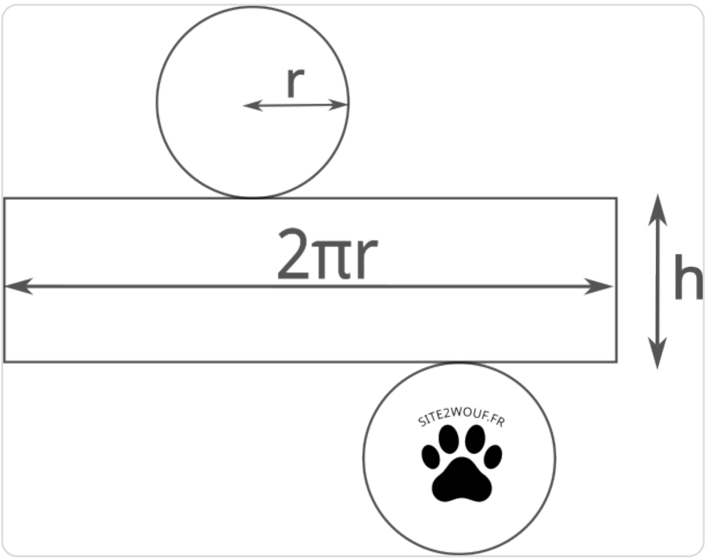
$$V = Bh$$

où B désigne l'aire de la base et h la hauteur du prisme

B. Cylindre de révolution

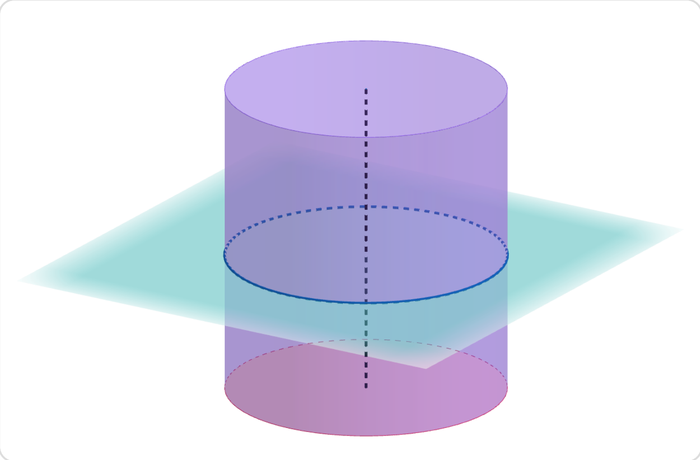


patron:

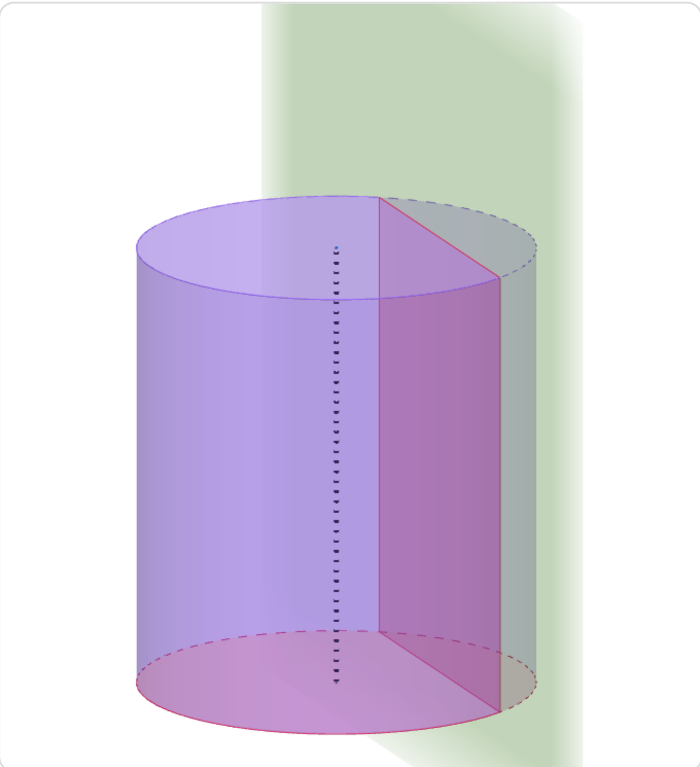


Section par un plan:

> Quand on coupe un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base, la section trouvée est un cercle de même rayon que celui de la base :



> Quand on coupe un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à la base, la section trouvée est un rectangle dont un côté est égal à la hauteur du cylindre.



Volume:

> Comme pour le prisme droit (solide « sans pointe ») la formule est donnée par:

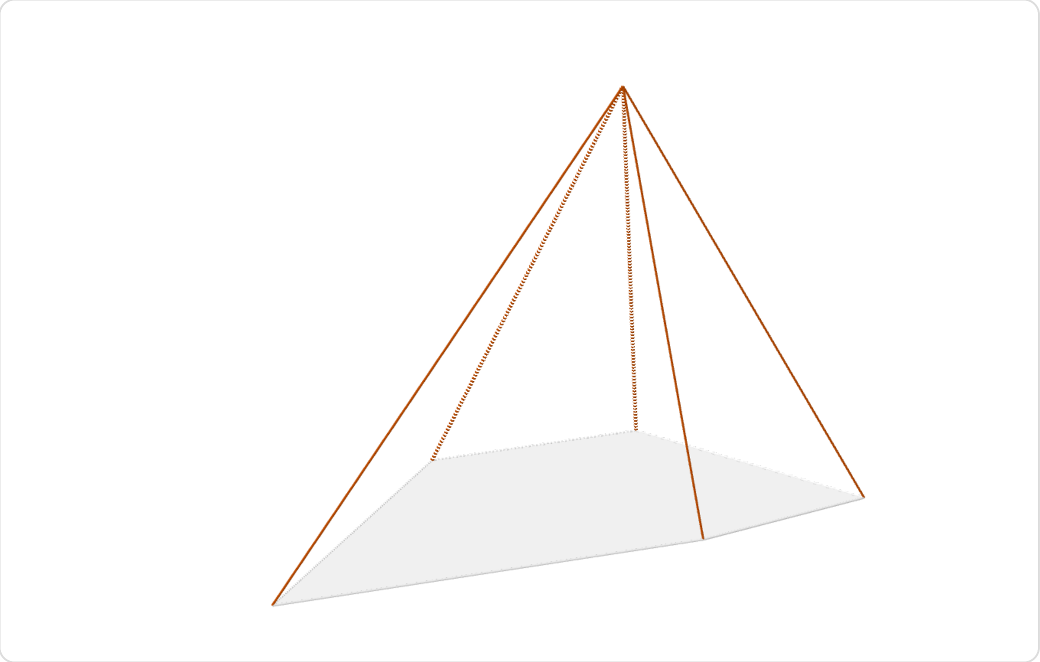
$$V = B \times h = \pi r^2 h = \pi \times r \times r \times h$$

(B désigne l'aire de la base)

II. Les solides pointus

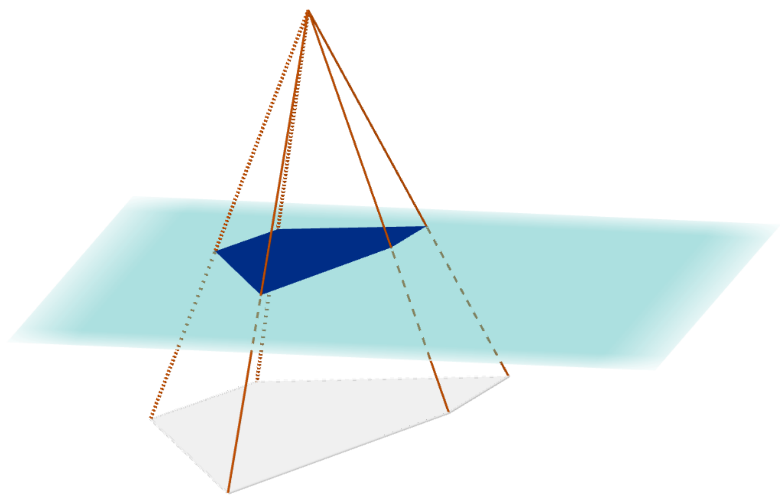
A Pyramides

Les pyramides ont pour base des polygones, et leurs faces latérales sont des triangles.



Remarques :

Quand on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, la section trouvée est de même nature que celle de la base:



Les pyramides régulières ont pour base des polygones réguliers:

- triangle équilatéral
- carré,...

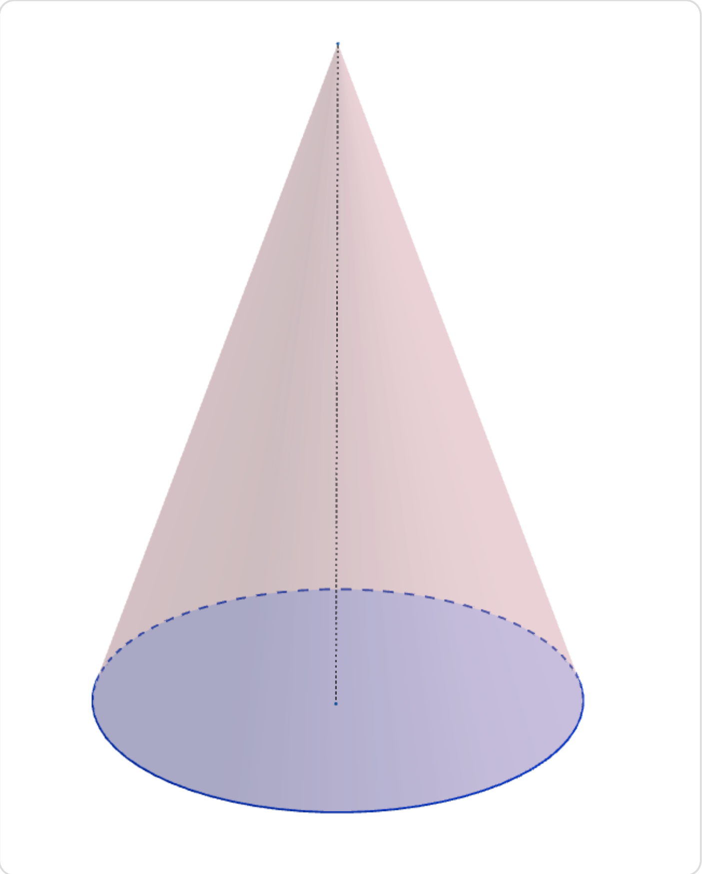
et leurs faces latérales sont des triangles isocèles.

Volume de la pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

Notes :

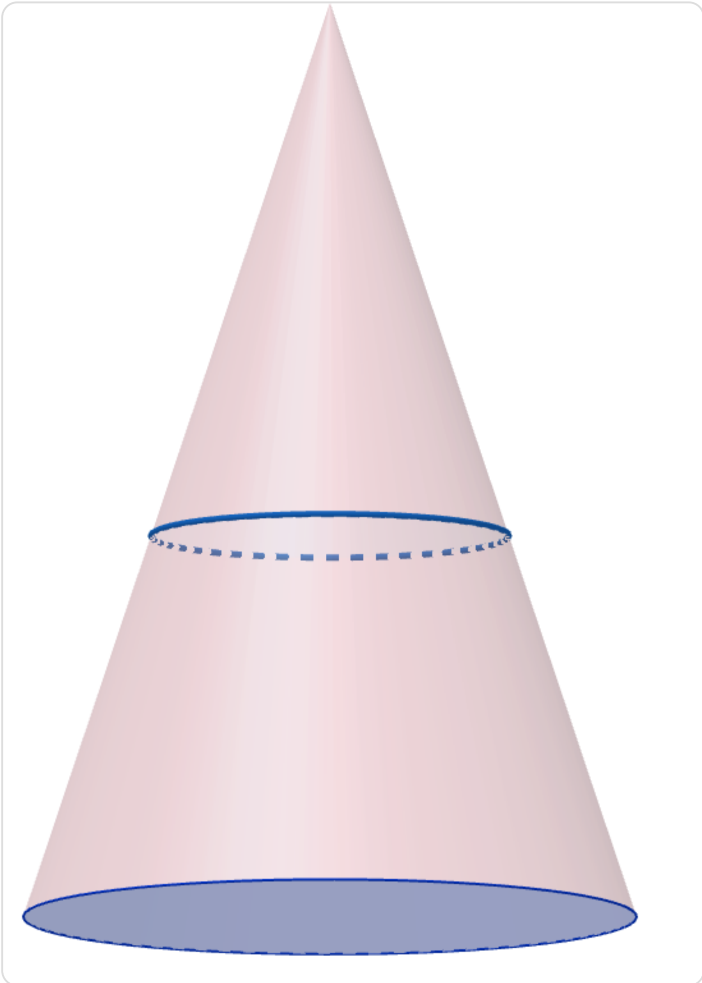
B. Cône de révolution :



💡 **REMARQUE**

Quand on coupe un cône par un plan parallèle à la base, la section trouvée est un cercle de rayon inférieur à celui de la base.

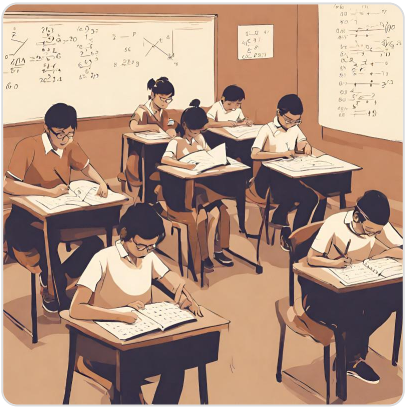
Notes :

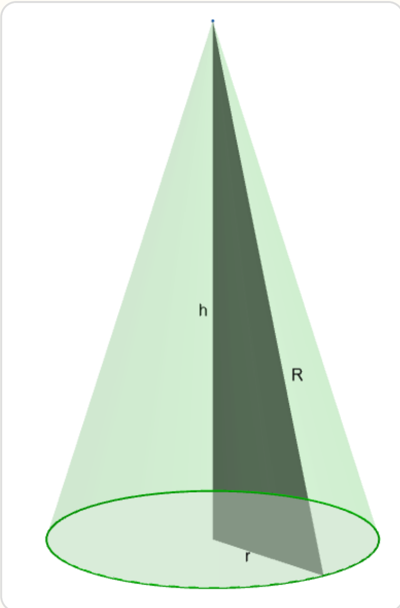


Patron:

Tracer le patron d'un cône de révolution dont le base est un cercle de 3cm de rayon, et de hauteur 4cm.

> ***Indice: La longueur de l'arc de cercle est égale à la circonférence du cercle de base***





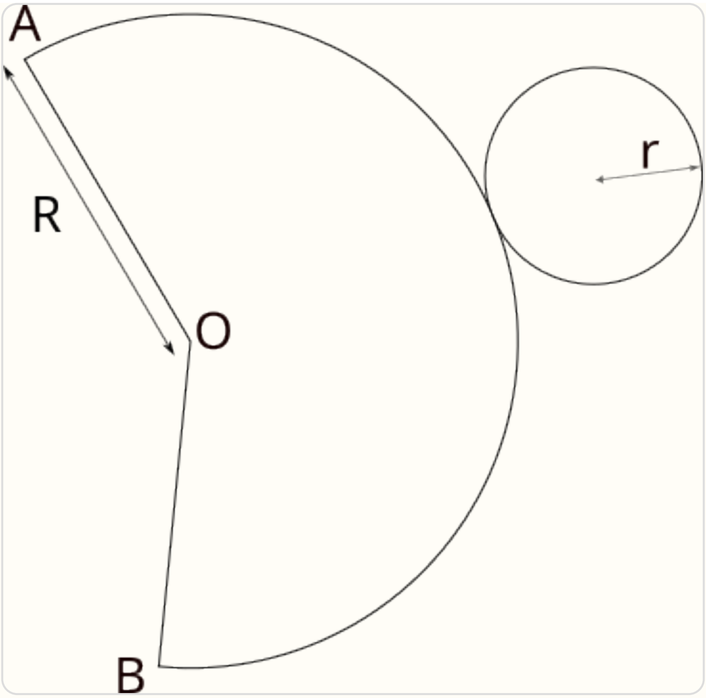
1. *On va commencer par calculer le R, le rayon de l'arc de cercle :*

Dans ce triangle rectangle, d'après le théorème de Pythagore :

$$R^2 = r^2 + h^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$R = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

2. *On va ensuite calculer l'angle* $\widehat{AOB}$ *:*



Longueur	*Angle*
$2\pi R = 10\pi$	$360°$
$2\pi r = 6\pi$	$\overset{\frown}{AOB}$

$$\overset{\frown}{AOB} = \frac{360 \times 6\pi}{10\pi} = 216°$$

Grandeurs et mesures

- Utiliser les formules de périmètre et d'aire d'un cercle.

Espace et géométrie

- Utiliser le théorème de Pythagore pour une construction.
- Construire un patron de cône à partir de données géométriques.

Volume du cône de rayon r et de hauteur h (B est l'aire de la base) :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

III La Sphère, la boule.

A. Définitions

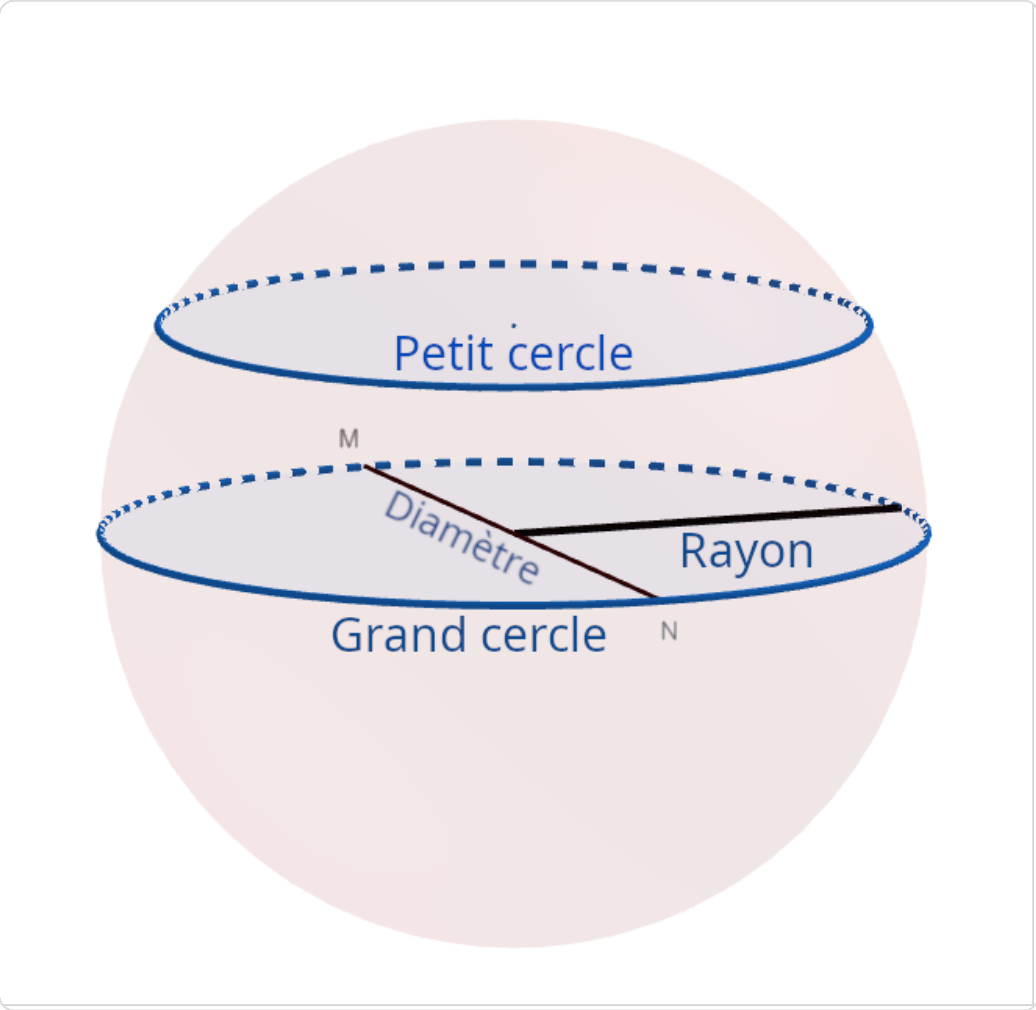
> Dans un plan donné le cercle de centre O et de rayon r cm est constitué de tous les points à exactement r cm de O.

> Dans un plan donné le disque de centre O et de rayon r cm est constitué de tous les points dont la distance à O est inférieure (ou égale) à r cm.

> La sphère de centre O et de rayon r cm est constituée de tous les points de l'espace à exactement r cm de O.

> La boule de centre O et de rayon r cm est constituée de tous les points de l'espace dont la distance à O est inférieure (ou égale) à r cm.

Notes :



M et N sont diamétralement opposés

On ne peut pas construire le patron d'une sphère.

La section d'une sphère de centre O et de rayon R, par un plan est un cercle.

Si le plan passe par O, le cercle a pour rayon R

Sinon, son rayon r est inférieur à R

B. Aire et volume

Aire de la sphère :

$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

Volume de la boule :

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Notes :