

Fractions et Puissances

I Maîtrisons le vocabulaire des écritures fractionnaires.

A Fractions ou écritures fractionnaires ?

On appelle écriture fractionnaire du quotient $a:b$ de nombres relatifs l'écriture $\frac{a}{b}$

Cette écriture fractionnaire est seulement appelée fraction quand a et b sont des entiers relatifs.

Les expressions suivantes sont des écritures fractionnaires :

$\frac{3,5}{6,123}$ et $\frac{a}{b}$ mais seul $\frac{-17}{3}$ est une fraction.

B Numérateur et dénominateur.

Le nombre du haut s'appelle le numérateur, celui du bas le dénominateur et « le trait » s'appelle « barre de fraction »

C Opposé d'un nombre relatif

1 Définition

L'opposé d'un nombre relatif est le nombre qui a la même distance à zéro mais le signe contraire.

2 Exemples

$\frac{17}{3}$ et $\frac{-17}{3}$ sont opposés.

$\frac{3,5}{6,123}$ et $\frac{-3,5}{6,123}$ sont opposés

3 Propriétés

La somme de deux nombres relatifs opposés est nulle :

$$\frac{17}{3} + \frac{-17}{3} = 0$$

Multiplier un relatif par -1 , c'est prendre son opposé:

$$\frac{17}{3} \times -1 = \frac{-17}{3}$$

D Inverse d'un nombre relatif non nul.

1 Définition

L'inverse de x (avec x non nul) est le quotient de 1 par x . On le note $1/x$ ou $1x$ ou encore x^{-1} .

2 Exemples

Ainsi l'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$ ou 5^{-1} et on a $\frac{1}{5} \times 5 = 1$

3 Propriété

L'inverse d'un nombre relatif non nul x est le nombre relatif y tel que $x \times y = 1$

L'inverse de $\frac{-2}{3}$ est $\frac{-3}{2}$ en effet $\frac{-2}{3} \times \frac{-3}{2} = 1$

II Addition de relatifs en écriture fractionnaire.

A Mise au même dénominateur

La première étape pour ajouter des relatifs en écriture fractionnaire est la mise au même dénominateur:

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \dots$$

B. Ajout de relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur.

Pour ajouter des relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on ajoute les numérateurs et on garde le dénominateur commun:

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6}$$

III Soustraction de relatifs en écriture fractionnaire.

A. Petit rappel:

Soustraire un relatif, c'est ajouter son opposé.

B. Méthode

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$$

IV Multiplication de relatifs en écriture fractionnaire.

A. Exercice :

Écrire le calcul qui correspond à la proposition suivante : les trois quart de deux tiers.

Solution :

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$$

B. Propriété

Pour multiplier des relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Division de relatifs en écriture fractionnaire.

A. Propriété

Diviser par un relatif non nul, c'est multiplier par son inverse.

B. Méthode

On se ramène donc à une multiplication:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{9}{8}$$

VI Puissance et définitions

A Carré

a étant un nombre relatif, on appelle carré de a, le nombre noté a^2 tel que :

$$a^2 = aa$$

Exemples :

- $4^2=16$
- $5^2=25$
- $(-6)^2=36$

B Cube

a étant un nombre relatif, on appelle cube de a, le nombre noté a^3 tel que:

$$a^3 = aaa$$

Exemples :

$$2^3=8$$

$$(-3)^3=-27$$

C Généralisation pour $n>1$

a étant un nombre relatif et n un entier relatif $n>1$:

$a^n = aaa\dots aaa$ avec n fois le facteur a

On lit a puissance n, n est l'exposant.

D Convention

Par convention :

Un nombre non nul, élevé à la puissance 0 est égal à 1 :

$$x^0=1$$

Un nombre élevé à la puissance 1 est égal à lui même :

$$x^1=x$$

E Généralisation pour $n<0$

On généralise pour les entiers relatifs:

$$x^{-1}=\frac{1}{x} \quad , \quad x^{-2}=\frac{1}{x^2} \quad , \quad x^{-3}=\frac{1}{x^3} \quad \text{etc...}$$

remarque:

Au passage, on comprend la notation de l'inverse sur certaine calculatrice.

F Puissances, priorités et pièges classiques...

La puissance est prioritaire sur les autres opérations.

Ne pas confondre :

$$(-6)^2=(-6)\times(-6)=36 \quad \text{et} \quad -6^2=-6\times 6=-36$$

VII Exemples de calcul

A Un conseil pour commencer

Pour calculer avec des puissances, il est nécessaire de bien connaître la définition et d'y revenir aussi souvent que possible!

B Des produits...

1 Même nombre, exposants différents

$$7^3 \times 7^5 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7) = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^8$$

En revenant à la définition, on s'aperçoit qu'il suffit d'ajouter les exposants!

2 Nombres différents, même exposant.

$$7^3 \times 5^3 = 7 \times 7 \times 7 \times 5 \times 5 \times 5 = (7 \times 5) \times (7 \times 5) \times (7 \times 5) = (7 \times 5)^3 = 35^3$$

C Des quotients

1 Même nombre, exposants différents

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{7 \times 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$$

$$\frac{7^5}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = \frac{7 \times 7}{1} = 7^2$$

En revenant à la définition, on s'aperçoit qu'il suffit de soustraire les exposants!

2 Nombres différents, même exposant.

$$\frac{7^3}{5^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{5 \times 5 \times 5} = \frac{7}{5} \times \frac{7}{5} \times \frac{7}{5} = \left(\frac{7}{5}\right)^3$$

D Des puissances

$$(7^3)^5 = 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 = 7^{(3 \times 5)} = 7^{15}$$

En revenant à la définition, on s'aperçoit qu'il suffit de multiplier les exposants!

VIII Puissances de 10, notation scientifique.

A Écriture décimale des puissances de 10

1 Deux exemples :

$$10^3 = 1\ 000 \text{ (exposant } +3 \text{ et 3 zéros après le 1)}$$

$$10^{-5} = 0,00001 \text{ (exposant } -5 \text{ et 5 zéros avant le 1)}$$

2 A retenir :

Si n est un entier positif :

10^n est un nombre entier qui s'écrit avec un 1 suivi de n zéro(s)

10^{-n} est un nombre décimal qui s'écrit $0,00\dots001$, il y a n zéros avant le 1.

B Écriture scientifique.

1 Définition :

L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal tel que:

- a n'a qu'un seul chiffre avant la virgule.
- Ce chiffre n'est pas nul.

2 Exemples :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants:

$$789 = 7,89 \times 10^2$$

$$0,0258 = 2,58 \times 10^{-2}$$

C Ordre de grandeur

L'écriture scientifique d'un nombre permet d'avoir très rapidement une idée de l'ordre de grandeur d'un nombre.

156 000 000 000 000 000 est beaucoup moins parlant que $1,56 \times 10^{20}$
(pour le comparer avec un autre grand nombre par exemple)