Fractions et Puissances

I Maîtrisons le vocabulaire des écritures fractionnaires.

A Fractions ou écritures fractionnaires ?

On appelle écriture fractionnaire du quotient a:b de nombres relatifs l'écriture $\frac{a}{b}$. Cette écriture fractionnaire est seulement appelée fraction quand a et b sont des entiers relatifs.

Les expressions suivantes sont des écritures fractionnaires :

$$\frac{3{,}5}{6{,}123} \quad et \quad \frac{a}{b} \quad mais \quad seul \quad \frac{-17}{3} \quad est \quad une \quad fraction.$$

B Numérateur et dénominateur.

Le nombre du haut s'appelle le numérateur, celui du bas le dénominateur et « le trait » s'appelle « barre de fraction »

C Opposé d'un nombre relatif

1 Définition

L'opposé d'un nombre relatif est le nombre qui a la même distance à zéro mais le signe contraire.

2 Exemples

$\frac{17}{3}$ *et* $\frac{-17}{3}$ sont opposés.

$\frac{3{,}5}{6{,}123}$ *et* $\frac{-3{,}5}{6{,}123}$ sont opposés

3 Propriétés

La somme de deux nombres relatifs opposés est nulle :

$$\frac{17}{3}+\frac{-17}{3}=0$$

Multiplier un relatif par -1, c'est prendre son opposé:

$$\frac{17}{3}\times -1=\frac{-17}{3}$$

D Inverse d'un nombre relatif non nul.

1 Définition

L'inverse de x (avec x non nul) est le quotient de 1 par x. On le note 1/x ou $\frac{1}{x}$ ou encore x^{-1}.

2 Exemples

Ainsi l'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$ ou 5^{-1} et on a $\frac{1}{5}$ × 5 = 1

3 Propriété

L'inverse d'un nombre relatif non nul x est le nombre relatif y tel que x×y=1

L'inverse de $\frac{-2}{3}$ est $\frac{-3}{2}$ en effet $\frac{-2}{3}\times\frac{-3}{2}=1$

II Addition de relatifs en écriture fractionnaire.

A Mise au même dénominateur

La première étape pour ajouter des relatifs en écriture fractionnaire est la mise au même dénominateur:

$$\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{9}{6}+\frac{4}{6}=\ldots$$

B. Ajout de relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur.

Pour ajouter des relatifs en écriture fractionnaire de même dénominateur, on ajoute les numérateurs et on garde le dénominateur commun:

$$\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{9}{6}+\frac{4}{6}=\frac{13}{6}$$

III Soustraction de relatifs en écriture fractionnaire.

A. Petit rappel:

Soustraire un relatif, c'est ajouter on opposé.

B. Méthode

$$\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9}{6}-\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$$

IV Multiplication de relatifs en écriture fractionnaire.

A. Exercice :

Écrire le calcul qui correspond à la proposition suivante : les trois quart de deux tiers.

Solution :

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$$

B. Propriété

Pour multiplier des relatifs en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3\times2}{4\times3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Division de relatifs en écriture fractionnaire.

A. Propriété

Diviser par un relatif non nul, c'est multiplier par son inverse.

B. Méthode

On se ramène donc à une multiplication:

$$\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3\times3}{4\times2}=\frac{9}{8}$$

VI Puissance et définitions

A Carré

a étant un nombre relatif, on appelle carré de a, le nombre noté a^2 tel que :

$a^2 = aa$

Exemples :

- $4^2=16$
- $5^2=25$
- $(-6)^2=36$

B Cube

a étant un nombre relatif, on appelle cube de a, le nombre noté a^3 tel que:

$$a^3 = aaa$$

Exemples :

$2^3=8$

$(-3)^3=-27$

C Généralisation pour n>1

a étant un nombre relatif et n un entier relatif n>1:

$a^n = aaa........aaa$ avec n fois le facteur a

On lit a puissance n, n est l'exposant.

D Convention

Par convention :

Un nombre non nul, élevé à la puissance 0 est égal à 1 :

$x^0=1$

Un nombre élevé à la puissance 1 est égal à lui même :

$x^1=x$

E Généralisation pour n<0

On généralise pour les entiers relatifs:

$$x^{-1}=\frac{1}{x} \quad , \quad x^{-2}=\frac{1}{x^2} \quad , \quad x^{-3}=\frac{1}{x^3} \quad \text{etc...}$$

remarque:

Au passage, on comprend la notation de l'inverse sur certaine calculatrice.

F Puissances, priorités et pièges classiques...

La puissance est prioritaire sur les autres opérations.

Ne pas confondre :

$$(-6)^2=(-6)\times(-6)=36 \quad \text{et} \quad -6^2=-6\times6=-36$$

VII Exemples de calcul

A Un conseil pour commencer

Pour calculer avec des puissances, il est nécessaire de bien connaître la définition et d'y revenir aussi souvent que possible!

B Des produits...

1 Même nombre, exposants différents

$$7^3\times7^5=(7\times7\times7)\times(7\times7\times7\times7\times7)=7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7=7^8$$

En revenant à la définition, on s'aperçoit qu'il suffit d'ajouter les exposants!

2 Nombres différents, même exposant.

$$7^3\times5^3=7\times7\times7\times5\times5\times5=(7\times5)\times(7\times5)\times(7\times5)=(7\times5)^3=35^3$$

C Des quotients

1 Même nombre, exposants différents

$$\frac{7^3}{7^5}=\frac{7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7}=\frac{1}{7\times7}=\frac{1}{7^2}=7^{-2}$$

$$\frac{7^5}{7^3}=\frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7}=\frac{7\times7}{1}=7^2$$

En revenant à la définition, on s'aperçoit qu'il suffit de soustraire les exposants!

2 Nombres différents, même exposant.

$$\frac{7^3}{5^3}=\frac{7\times7\times7}{5\times5\times5}=\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}=\left(\frac{7}{5}\right)^3$$

D Des puissances

$$(7^3)^5=7^3\times7^3\times7^3\times7^3\times7^3=7^{(3\times5)}=7^{15}$$

En revenant à la définition, on s'aperçoit qu'il suffit de multiplier les exposants!

VIII Puissances de 10, notation scientifique.

A Écriture décimale des puissances de 10

1 Deux exemples :

10^3 = 1 000 (exposant +3 et 3 zéros après le 1)

10^{-5} = 0,00001 (exposant -5 et 5 zéros avant le 1)

2 A retenir :

Si n est un entier positif :

10^n est un nombre entier qui s'écrit avec un 1 suivi de n zéro(s)

10^{-n} est un nombre décimal qui s'écrit 0,00..001 ,il y a n zéros avant le 1.

B Écriture scientifique.

1 Définition :

L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme a x 10^n où a est un nombre décimal tel que:

- a n'a qu'un seul chiffre avant la virgule.
- Ce chiffre n'est pas nul.

2 Exemples :

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants:

789 = 7,89 x 10^{2}

0,0258 = 2,58 x 10^{-2}

C Ordre de grandeur

L' écriture scientifique d'un nombre permet d'avoir très rapidement une idée de l'ordre de grandeur d'un nombre.

156 000 000 000 000 000 000 est beaucoup moins parlant que 1,56 x 10^{20}
(pour le comparer avec un autre grand nombre par exemple)