Cours et méthodes

FRACTIONS

1) Définir de nouveaux nombres

Définition

Soit a et b deux nombres, b non nul.
Le **quotient** $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

Entraîne-toi à **Déterminer un quotient**

Énoncé

- Quel est le nombre qui, multiplié par 7, donne 9 ?
- Quel est le nombre qui, multiplié par 3, donne 36 ?

Correction :

$7 \times \frac{9}{7} = 9.$

Le nombre qui multiplié par 7 donne 9 est $\frac{9}{7}$

$\frac{36}{3} = 12$. Le nombre qui multiplié par 3 donne 36 est 12

Définitions

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'un quotient.
Une **fraction** est un quotient de deux nombres entiers (donc un nombre rationnel).
Une **écriture fractionnaire** est une écriture d'un quotient avec un trait de fraction, mais le numérateur ou le dénominateur ne sont pas entiers.
Un **pourcentage** est une écriture fractionnaire de dénominateur 100.

» **Exemples :**

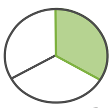
- $2 = \frac{2}{1}$; $0{,}5 = \frac{1}{2}$; $10 : 3 = \frac{10}{3}$ sont rationnels. π ne l'est pas. $\frac{2}{10}$ est une fraction, $\frac{8}{0{,}5}$ une écriture fractionnaire. $5\ \% = \frac{5}{100}$ ou $2{,}5\ \% = \frac{2{,}5}{100}$ sont des pourcentages.

» **Remarque**

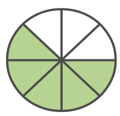
Une fraction peut être utilisée pour représenter un partage à parts égales. Alors,

- son dénominateur « dénomine » : il donne le nom de la part ou « sa taille »
- son numérateur « numère » : il donne le nombre de parts.

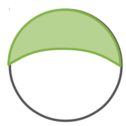
» **Exemple**



un tiers $\frac{1}{3}$



cinq huitièmes $\frac{5}{8}$



La partie coloriée ne représente pas la moitié du disque car le partage n'est pas équitable

2) Simplifier une écriture fractionnaire

Propriété

Deux fractions sont **égales** quand leurs numérateurs et dénominateurs sont proportionnels..

Pour tous nombres a, b et k où b et k sont non nuls :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \text{ et } \frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}.$$

Cours et méthodes

Entraîne-toi à Déterminer deux fractions égales

Énoncé

Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{1{,}2}{6} = \frac{\dots}{18}$

Correction

$\frac{1{,}2}{6} = \frac{\dots}{18}$ donc $\frac{1{,}2}{6} = \frac{3{,}6}{18}$

Énoncé

Les nombres $\frac{2{,}1}{-3{,}5}$ et $\frac{-4{,}1}{6{,}9}$ sont-ils égaux ? Justifie.

Correction

$2{,}1 \times 6{,}9 = 14{,}49$ et $(-3{,}5) \times (-4{,}1) = 14{,}35$
Les produits en croix ne sont pas égaux donc les nombres ne sont pas égaux.

Entraîne-toi à Simplifier une fraction

Il s'agit de trouver une fraction égale ayant un dénominateur (entier) plus petit.

Énoncé

Simplifie le quotient $\frac{15}{21}$

Correction

$\frac{15}{21} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{5}{7}$

Énoncé

Simplifie la fraction $\frac{42}{-140}$

Correction

$\frac{+42}{-140} = -\frac{42}{140}$

$\frac{42}{-140} = -\frac{3 \times 2 \times 7}{10 \times 7 \times 2}$

$\frac{42}{-140} = -\frac{3}{10}$

3 Comparer deux écritures fractionnaires

Règle

Pour comparer des nombres en écriture fractionnaire, on peut les écrire avec le même dénominateur positif puis les ranger dans le même ordre que leurs numérateurs.

Entraîne-toi à Comparer deux nombres en écriture fractionnaire

Énoncé

Compare les nombres $\frac{1{,}2}{4}$ et $\frac{5{,}7}{20}$.

Correction

$\frac{1{,}2}{4} = \frac{1{,}2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$. Or, $6 > 5{,}7$

d'où $\frac{6}{20} > \frac{5{,}7}{20}$ donc $\frac{1{,}2}{4} > \frac{5{,}7}{20}$

Énoncé

Compare les quotients $\frac{-2}{7}$ et $\frac{3}{-8}$.

Correction

$\frac{-2 \times 8}{7 \times 8} = \frac{-16}{56}$ et $\frac{-3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{-21}{56}$

Or, $-16 > -21$ donc $\frac{-16}{56} > \frac{-21}{56}$

et par suite $\frac{-2}{7} > \frac{3}{-8}$.

4) Additionner, soustraire

Règle

Pour **additionner (ou soustraire)** des nombres en écriture fractionnaire **ayant le même dénominateur**,
- on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et
- on garde le dénominateur commun.

Pour tous nombres a, b et c où b est non nul : $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Entraîne-toi à **Additionner deux nombres en écriture fractionnaire**

Énoncé

Calcule l'expression : $A = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}$.

Correction

$A = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$

Énoncé

Calcule l'expression :

$A = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$.

Correction

$A = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$

$A = \frac{7 \times \mathbf{4}}{3 \times \mathbf{4}} + \frac{6}{12}$

$A = \frac{28}{12} + \frac{6}{12}$

$A = \frac{34}{12}$

$A = \frac{17}{6}$

Énoncé

Calcule l'expression $A = -1 + \frac{13}{-30} - \frac{-11}{12}$.

Correction

$A = -1 + \frac{13}{-30} - \frac{-11}{12}$

$A = -\frac{1 \times 60}{1 \times 60} - \frac{13 \times 2}{30 \times 2} + \frac{11 \times 5}{12 \times 5}$

$A = -\frac{60}{60} - \frac{26}{60} + \frac{55}{60}$

$A = \frac{-60 - 26 + 55}{60}$

$A = \frac{-31}{60}$

5) Multiplier

Règle

Pour **multiplier des nombres en écriture fractionnaire**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous nombres a, b, c et d où b et d sont non nuls : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

» **Remarque**

Il est judicieux de simplifier les fractions avant d'effectuer les calculs afin d'obtenir plus facilement une fraction simplifiée.

Entraîne-toi à **Multiplier deux nombres en écriture fractionnaire**

Énoncé

Calcule et simplifie le résultat :

$D = \frac{8}{7} \times \frac{5}{3}$ et

$F = \frac{4}{15} \times \frac{25}{16}$

Correction

$D = \frac{8}{7} \times \frac{5}{3}$

$D = \frac{8 \times 5}{7 \times 3}$

$\mathbf{D = \frac{40}{21}}$

$F = \frac{4}{15} \times \frac{25}{16}$

$F = \frac{4 \times 25}{15 \times 16}$

$F = \frac{\mathbf{4} \times \mathbf{5} \times 5}{3 \times \mathbf{5} \times \mathbf{4} \times 4}$

$F = \frac{5}{3 \times 4}$

$\mathbf{F = \frac{5}{12}}$

» **Remarque :** En présence de signes $-$, on commence par déterminer le signe du résultat.

Énoncé

Calcule l'expression $B = -\dfrac{35}{33} \times \dfrac{-39}{-80}$

Correction

$B = -\dfrac{35}{33} \times \dfrac{-39}{-80}$

$B = -\dfrac{35 \times 39}{33 \times 80}$

$B = -\dfrac{7 \times 5 \times 13 \times 3}{11 \times 3 \times 2 \times 5 \times 8}$

$B = -\dfrac{7 \times 13}{11 \times 2 \times 8}$

$\mathbf{B = -\dfrac{91}{176}}$

6 Diviser

Définition

Deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Propriétés

- Tout nombre x non nul admet un inverse (noté x^{-1}) qui est le nombre $\dfrac{1}{x}$.
- Tout nombre en écriture fractionnaire $\dfrac{a}{b}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$) admet un inverse qui est le nombre $\dfrac{b}{a}$.

» **Remarques**

- Un nombre et son inverse ont toujours le même signe.
  En effet, leur produit 1 est positif et seul le produit de deux nombres de même signe est positif.
- Zéro est le seul nombre qui n'admet pas d'inverse.
  En effet, tout nombre multiplié par 0 donne 0 et ne donnera jamais 1.

» **Exemple :** L'inverse de 3 est $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$ et l'inverse de $\dfrac{-7}{3}$ est $\left(\dfrac{-7}{3}\right)^{-1} = -\dfrac{3}{7}$.

Propriété

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

Pour tous nombres a, b, c et d où b, c et d sont non nuls :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \text{ ou } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Entraîne-toi à **Diviser deux nombres en écriture fractionnaire**

Énoncé

Calcule $C = \dfrac{-8}{7} \div \dfrac{5}{-3}$; $D = \dfrac{-\dfrac{32}{21}}{\dfrac{-48}{-35}}$ et donne les résultats en simplifiant le plus possible.

Correction

$C = \dfrac{-8}{7} \div \dfrac{5}{-3}$

$C = +\left(\dfrac{8}{7} \div \dfrac{5}{3}\right)$

$C = \dfrac{8}{7} \times \dfrac{3}{5}$

$C = \dfrac{8 \times 3}{7 \times 5}$

$\mathbf{C = \dfrac{24}{35}}$

$D = \dfrac{-\dfrac{32}{21}}{\dfrac{-48}{-35}}$

$D = -\dfrac{\dfrac{32}{21}}{\dfrac{48}{35}} = -\dfrac{32}{21} \times \dfrac{35}{48}$

$D = -\dfrac{8 \times 2 \times 2 \times 7 \times 5}{7 \times 3 \times 3 \times 2 \times 8}$

$D = -\mathbf{\dfrac{10}{9}}$

7 Utiliser de nouvelles notations

A. Puissances d'exposant positif

Définitions

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \text{ s'écrit } a^n$$

- a^n se lit « ***a* exposant n** » ou « *a* puissance n »
- a^n est appelé **puissance** n-ième de a.
- n est appelé l'exposant.

» **Remarque :** Par convention $a^0 = 1$

$a^1 = a$ a^2 se lit « a au carré » a^3 se lit « a au cube »

Entraîne-toi à **Utiliser les puissances d'exposant positif**

Énoncé
Donne l'écriture décimale de 5^4
Correction : $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = \mathbf{625}$

Énoncé
Écris sous la forme d'une puissance : $7^2 \times 7^3$
Correction :
$7^2 \times 7^3 = (7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) = \mathbf{7^5}$

B. Puissances d'exposant négatif

Définitions

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a non nul :

$$\frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} \text{ s'écrit } a^{-n}.$$

» **Remarque :** Pour tout entier n, a^{-n} est **l'inverse** de a^n soit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et en particulier $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Entraîne-toi à **Utiliser les puissances d'exposant négatif**

Énoncé
Donne l'écriture décimale de 10^{-3}.
Correction
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = \mathbf{0{,}001}$

Énoncé
Écris sous la forme d'une puissance : $\frac{2^3}{2^5}$
Correction
$\frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^2} = \mathbf{2^{-2}}$

Propriété

Pour tout nombre entier relatif n,

Si a est **positif** alors a^n est **positif**.

Si a est **négatif** alors a^n est
- **positif** lorsque l'exposant n est pair, et
- **négatif** lorsque l'exposant n est impair.

Entraîne-toi à **Déterminer le signe d'une puissance**

■ **Énoncé**

Détermine le signe de :

$A = (-3)^4$

$B = -3^4$

$C = (-2)^{-5}$

Correction

Comme – 3 est négatif et l'exposant 4 est pair, A est un nombre positif.

Il s'agit ici d'une puissance de 3, nombre positif, précédée d'un signe –. B est un nombre négatif.

Comme – 2 est négatif et l'exposant – 5 est impair, C est un nombre négatif.

C. Enchaîner des calculs

Règle

Dans le cas d'un enchaînement de calculs, la puissance, qui est elle-même une multiplication doit se calculer avant les multiplications.
En résumé, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses, puis les exposants, puis les multiplications et les divisions et finalement les additions et les soustractions.

Entraîne-toi à **Calculer une expression avec des puissances**

■ **Énoncé**

Calcule : $A = 1 + 5 \times 2^4$

Correction

$A = 1 + 5 \times 2^4$

$A = 1 + 5 \times 16$

$A = 1 + 80$

$A =$ **81**

8 Utiliser les puissances de 10

A. Définition

Propriété

Pour tout nombre entier $n > 0$:

10^n s'écrit $1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}}$; 10^{-n} s'écrit $\underbrace{0{,}0\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$

» **Rappel :** $10^0 = 1$

Entraîne-toi à **Écrire un nombre en utilisant les puissances de 10**

■ **Énoncé**

Écris les nombres 100 000 ; 0,01 ; 100 et 0,000 001 sous la forme d'une puissance de 10.

Correction

- 100 000 = $\mathbf{10^5}$
- 0,01 = $\mathbf{10^{-2}}$
- 100 = $\mathbf{10^2}$
- 0,000 001 = $\mathbf{10^{-6}}$

B. Calculer avec des puissances de 10

Règles de calcul

Pour m et p entiers relatifs quelconques

- règle du produit : $10^m \times 10^p = 10^{m+p}$
- règle du quotient : $\dfrac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$
- règle de la puissance de puissance : $\left(10^m\right)^p = 10^{m \times p}$

» **Attention :** Il n'y a pas de règle avec l'addition ou la soustraction !

Entraîne-toi à Calculer avec les puissances de 10

Énoncé

Écris les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance de 10.

$A = 10^4 \times 10^3$

$B = 10^{-3} \times 10^{-7}$

$C = \dfrac{10}{10^{-3}}$

$D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$.

$E = \left(10^{-3}\right)^{-7} \times \left(10^2\right)^{-3}$

Correction

$A = 10^4 \times 10^3$
$A = 10^{4+3}$
$\mathbf{A = 10^7}$

$B = 10^{-3} \times 10^{-7}$
$B = 10^{-3+(-7)}$
$\mathbf{B = 10^{-10}}$

$C = \dfrac{10^1}{10^{-3}}$
$C = 10^{1-(-3)}$
$C = 10^{1+3}$
$\mathbf{C = 10^4}$

$D = \dfrac{10^{-7}}{10^3}$
$D = 10^{-7-3}$
$\mathbf{D = 10^{-10}}$

$E = 10^{-3 \times (-7)} \times 10^{2 \times (-3)}$
$E = 10^{21} \times 10^{-6}$
$E = 10^{21+(-6)}$
$E = 10^{15}$

Énoncé

Donne l'écriture décimale des nombres $F = 10^3 + 10^2$ et $G = 10^{-2} - 10^{-3}$.

Correction

$F = 10^3 + 10^2 = 1\,000 + 100 = \mathbf{1\,100}$

$G = 10^{-2} - 10^{-3} = 0{,}01 - 0{,}001 = \mathbf{0{,}009}$

9 Utiliser la notation scientifique

A. Définition

Définitions

Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $\boldsymbol{a \times 10^n}$, où a est un nombre décimal **ayant un seul chiffre non nul pour partie entière** et où n est un nombre **entier relatif**.
a est appelé **mantisse** du nombre.

Entraîne-toi à Écrire un nombre en utilisant la notation scientifique

Énoncé

Écris le nombre $A = 6\,430$ en notation scientifique.

Correction

$A = 6\,430 = 6{,}43 \times 1\,000 = 6{,}43 \times 10^3$
L'écriture scientifique de A est donc $6{,}4 \times 10^3$.

B. Comparer deux nombres en écriture scientifique

Règle

Pour **comparer** deux nombres en notation scientifique, on compare d'abord leurs signes. S'il sont de même signe, on peut comparer leurs **ordres de grandeur** à l'aide des **exposants** de leur puissance de 10.
En cas d'égalité des exposants, on compare alors les mantisses.

↘ Entraîne-toi à Comparer deux nombres en notation scientifique

Énoncé

Compare
- $A = 1{,}7 \times 10^3$ et $B = 2{,}5 \times 10^2$
- $C = 12{,}4 \times 10^3$ et $D = 3{,}1 \times 10^4$.

Correction

- L'ordre de grandeur de A est 10^3 alors que B est de l'ordre de 10^2. Donc **A > B**.
- La notation scientifique de C est :
  $C = 1{,}24 \times 10 \times 10^3 = 1{,}24 \times 10^4$.
  C et D ont le même ordre de grandeur.
  Or, $1{,}24 < 3{,}1$ donc **C < D**.

C. Calculer avec des nombres en notation scientifique

Règle

Dans un calcul ne comportant que des multiplications et divisions, on **regroupe** les nombres écrits sous la forme de **puissances de 10** d'un côté et **les mantisses** de l'autre côté, puis on calcule avec les règles habituelles.

↘ Entraîne-toi à Calculer avec des nombres en notation scientifique

Énoncé

- Donne l'écriture scientifique du produit de $A = 2 \times 10^4$ et 3×10^3
- Donne l'écriture décimale de $B = \dfrac{14 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^6}{2 \times 10^4}$

Correction :

- $A = 2 \times 10^4 \times 3 \times 10^3$

$A = 2 \times 3 \times 10^4 \times 10^3$

$A = 6 \times 10^{4+3}$

$A = \mathbf{6 \times 10^7}$.

- $B = \dfrac{14 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^6}{2 \times 10^4}$

$B = \dfrac{14 \times 5}{2} \times \dfrac{10^{-3} \times 10^6}{10^4}$

$B = 35 \times \dfrac{10^{-3+6}}{10^4}$

$B = 35 \times \dfrac{10^3}{10^4}$

$B = 35 \times 10^{3-4}$

$B = 35 \times 10^{-1}$

$B = \mathbf{3{,}5}$