Proportionnalité

I Proportionnalité, et fonctions linéaires

A Généralité

1 tableau de proportionnalité

On dit qu'un tableau est un tableau de proportionnalité si les termes de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par un même nombre.

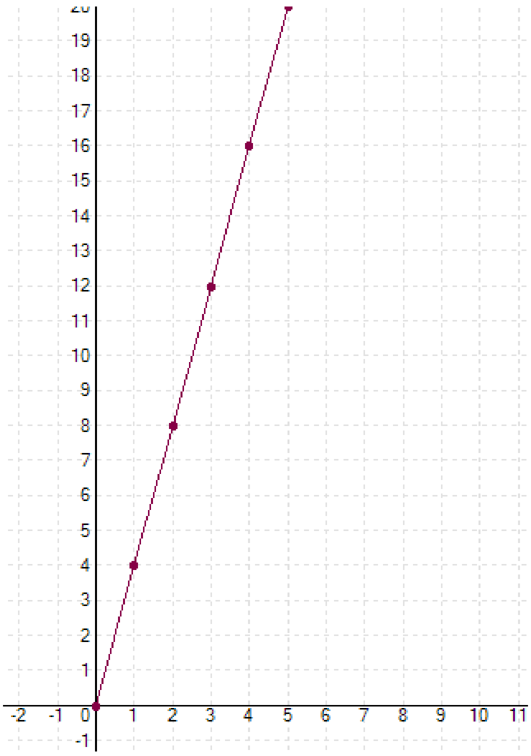
Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Exemple:

Côté d'un carré en cm	1	2	3	4	5	10	4,1
Périmètre de ce carré en cm	4	8	12	16	20	40	16,4

Ce tableau est un tableau de proportionnalité, le coefficient est 4

2 graphique.



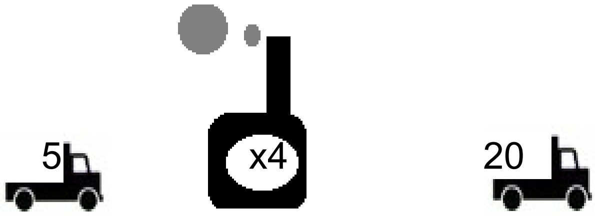
Les points du graphique sont alignés avec l'origine du repère.

Le ***coefficient de proportionnalité 4*** *peut être « lu » sur le graphique:*

Si on avance de 1 sur l'axe des abscisses, on monte(+) de 4 sur l'axe des ordonnées

B Fonctions Linéaires

1 La notion de fonction, «l'usine»



L'usine représente la ***fonction linéaire*** f qui a x associe 4x

On note:

f: x -> 4x ou ***f(x)=4x***

on a:

f: 5 -> 20 qu'on écrira *f(5)=20.*

L'usine f (la fonction linéaire) transforme la matière première (les nombres) pour « fabriquer » de nouveaux nombres (qu'on appelle images)

f(3)=12 peut se traduire par:

Par la fonction linéaire f, l'image du nombre 3 est le nombre 12.

2 Fonction linéaire et proportionnalité

Ainsi à chaque situation de proportionnalité correspond une fonction linéaire.

La représentation graphique d'une fonction linéaire est donc une droite passant l'origine du repère.

3 Un exemple détaillé: les pourcentages

Un magasin augmente le prix de tous ses produits de 15%, remplir le tableau suivant:

Prix avant l'augmentation en €	24,40	48,80	976
Augmentation en €	3,66	7,32	146,40

En pratique on peut utiliser la fonction linéaire *f: x -> 0,15x* pour calculer l'augmentation de *15% (15%=15/100=0,15)* sur un prix donné. *f(100)=15* , *f(0)=0* etc.

Remplir le tableau suivant:

Prix avant l'augmentation en €	24,40	48,80	976	25	28,80
Prix après l'augmentation en €	28,06	56,12	1122,4	28,75	33,12

En pratique on peut utiliser la fonction linéaire *g: x -> 1,15x* pour calculer le nouveau prix après une augmentation de 15%
En effet :
$x+0,15x=(1+0,15)x=1,15x$

$g(100)=115$, $g(0)=0$ *etc.*

II D'autres exemples

D'autres situations classiques de problèmes sont en rapport avec la proportionnalité et les fonctions linéaires:

A. vitesses moyennes

Monsieur Durand fait sa promenade hebdomadaire à vélo.
Il se rend au sommet du mont A à 30km de son domicile à 20km/h (ça monte) puis revient pas la même route à 30 km/h (ça descend!).Quelle est sa vitesse moyenne lors de sa promenade, en km/h puis en m/s?

Étudions «sa promenade»

1. L' aller

Distance en km	30	20
Temps en heure	t	1

Tableau de proportionnalité

t=30/20=1,5h. (On peut aussi utiliser la formule **V=d/t**)
Le temps de l'aller est une heure et demie.

2. Le retour

Distance en km	30	30
Temps en heure	t	1

Tableau de proportionnalité

Le temps du retour est évidemment 1 heure

3. Le trajet entier

Nous allons calculer la vitesse moyenne:

Distance en km	60	d
Temps en heure	2,5	1

Tableau de proportionnalité

d=60/2,5=24

La vitesse moyenne sur le trajet total est donc 24km/h (Étonnant non?)

4. en m/s

Distance en m	24000	d
Temps en s	3600	1

Tableau de proportionnalité

$d=24000/3600=240/36=20/3\approx 6{,}67m/s$

La vitesse moyenne est environ 6,67 m/s sur le trajet total.

B. Échelles

Il suffit de retenir que:

pour une échelle de 1/250 000 signifie que 1 unité sur le plan représente 250 000 unités dans la réalité et *de calculer la quatrième proportionnelle, en fonction de l'énoncé.*

Distance en m sur le dessin	1	d ?
Distance en m dans la réalité	250 000	D ?

Tableau de proportionnalité

OFFICIEL

CONTENUS

1. Représentations graphiques. Proportionnalité
2. Applications de la proportionnalité
   - Vitesse moyenne. Grandeurs quotients courantes
   - Calculs faisant intervenir des pourcentages

COMPÉTENCES EXIGIBLES

Utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine.

Utiliser l'égalité $d = vt$ pour des calculs de distance parcourue, de vitesse et de temps. Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).

Mettre en oeuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.

COMMENTAIRES

On fera travailler les élèves à la fois sur des exemples et des contre-exemples de situations de proportionnalité.

Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 km. h^{-1} et le retour à 30 km. h^{-1}. Les compétences exigibles se réduisent aux vitesses mais d'autres situations de changements d'unités méritent d'être envisagées: problèmes de change monétaire, consommation de carburant d'un véhicule en litres pour 100 kilomètres ou en kilomètres parcourus par litre.

En liaison avec d'autres disciplines (géographie,…), la notion d'indice pourra être présentée comme un cas particulier du coefficient de proportionnalité, donnant lieu à illustrations et calculs mais en aucun cas à des développements théoriques.

Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en oeuvre à la fois un coefficient de proportionnalité, sous forme de pourcentage ou d'indice, et des quantités ou des effectifs. Par exemple, connaissant le pourcentage d'un caractère dans deux groupes d'effectifs différents,déterminer le pourcentage obtenu
après réunion des deux groupes