Sujet original de préparation progressive. Compétences visées : reconnaître une symétrie centrale, construire l'image d'un point ou d'une figure, utiliser le milieu, lire des coordonnées, exploiter les propriétés de conservation et résoudre des questions de type brevet.

Exercice 1 – Reconnaître une symétrie centrale

Répondre aux questions suivantes.

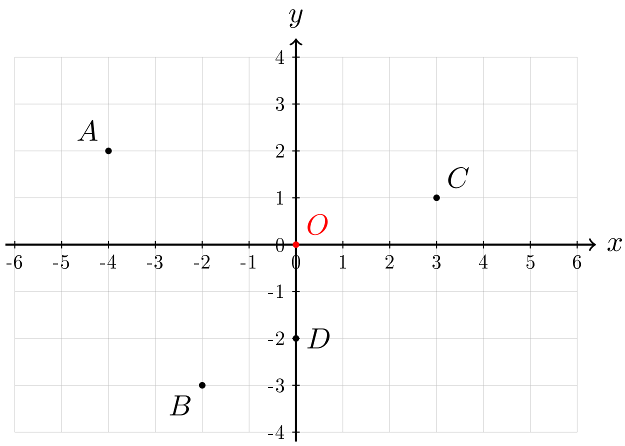
1) Quelle transformation correspond à un demi-tour autour d'un point ?
2) Dans une symétrie centrale de centre O, que représente O pour le segment reliant un point A à son image A' ?
3) Une symétrie centrale conserve-t-elle les longueurs ? les angles ? les aires ?
4) Une symétrie centrale conserve-t-elle l'orientation d'une figure ?

Transformation	Symétrie axiale	Symétrie centrale	Translation
Effet principal	Retournement		Glissement

Compléter la case manquante du tableau.

Exercice 2 – Image de points sur quadrillage

Sur le quadrillage ci-dessous, O est le centre de symétrie. On a placé les points A, B, C et D.



1) Construire mentalement les images A', B', C' et D' par la symétrie centrale de centre O.
2) Donner les coordonnées de A', B', C' et D'.
3) Quel point aurait pour image lui-même par cette symétrie centrale ?

Exercice 3 – Coordonnées dans un repère

Dans un repère orthonormé, on considère les points

$$M(-5;1),\quad N(2;4),\quad P(3;-2).$$

On effectue la symétrie centrale de centre l'origine $O(0;0)$.

1) Donner les coordonnées de M', N' et P'.
2) Donner la règle générale : si un point a pour coordonnées $(x;y)$, quelles sont les coordonnées de son image par symétrie centrale de centre O ?
3) Calculer MN.
4) Que vaut $M'N'$? Justifier sans recalculer.

Exercice 4 – Centre quelconque

On considère le point $I(1;2)$ et le point $A(-3;5)$. Le point A' est l'image de A par la symétrie centrale de centre I.

1) Que représente I pour le segment $[AA']$?
2) Calculer les coordonnées de A'.
3) Vérifier que I est bien le milieu de $[AA']$.

Même question avec $B(4;-1)$:

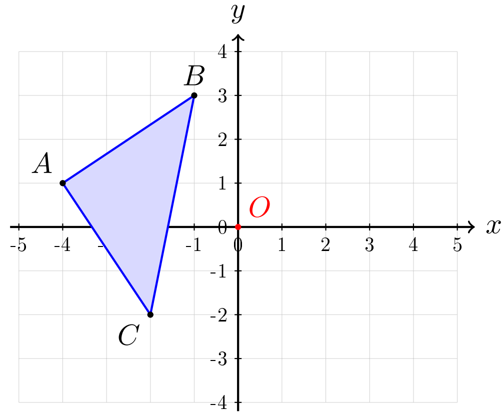
4) Calculer les coordonnées de B', image de B par la symétrie centrale de centre I.

Exercice 5 – Image d'une figure

On considère le triangle ABC avec

$$A(-4;1),\quad B(-1;3),\quad C(-2;-2).$$

On effectue la symétrie centrale de centre $O(0;0)$.



1) Donner les coordonnées de A', B' et C'.
2) Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont-ils superposables ? Justifier.
3) Les deux triangles ont-ils le même périmètre ? la même aire ?
4) L'ordre des sommets est-il conservé par une symétrie centrale ?

Exercice 6 – Retrouver le centre

Dans un repère, on donne $E(-2;5)$ et son image $E'(6;-1)$ par une symétrie centrale.

1) Calculer les coordonnées du centre I de cette symétrie.
2) Expliquer pourquoi ce centre est unique.

On donne aussi $F(1;-4)$ et $F'(7;2)$.

3) Calculer le milieu de $[FF']$.
4) Les couples (E, E') et (F, F') peuvent-ils correspondre à une même symétrie centrale ? Justifier.

Exercice 7 – Parallélogramme

On considère un quadrilatère $ABCD$. On sait que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O.

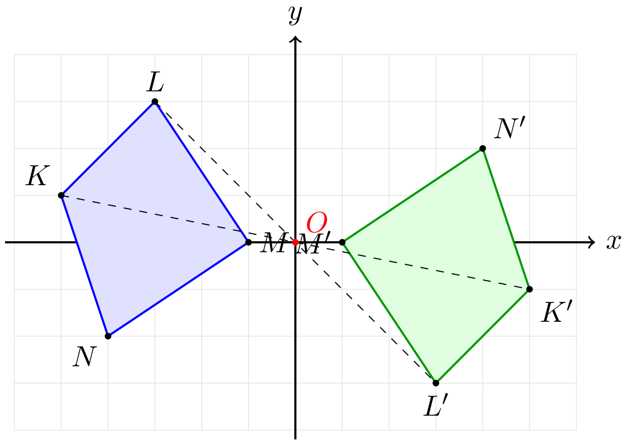
1) Quelle est l'image de A par la symétrie centrale de centre O ?
2) Quelle est l'image de B par cette même symétrie ?
3) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Application : dans un repère, $A(-3;1)$, $B(2;4)$ et $C(5;-1)$ sont trois sommets consécutifs d'un parallélogramme $ABCD$.

4) Calculer les coordonnées de D.

Exercice 8 – Figure type brevet

Un logo est formé d'un quadrilatère $KLMN$ et de son image $K'L'M'N'$ par une symétrie centrale de centre O.



1) Donner les coordonnées de K, L, M et N.
2) Donner les coordonnées de K', L', M' et N'.
3) Quelle propriété permet d'affirmer que O est le milieu de $[KK']$?
4) Si $KL = 2{,}8$ cm, que vaut $K'L'$?
5) Les deux quadrilatères ont-ils la même orientation ? Justifier.

Exercice 9 – Centre non placé à l'origine

Dans un repère, on considère le centre $S(2; -1)$ et les points

$$A(5;3), \quad B(-1;4), \quad C(0;-5).$$

On note A', B' et C' leurs images par la symétrie centrale de centre S.

1) Calculer les coordonnées de A', B' et C'.
2) Vérifier que S est le milieu de $[BB']$.
3) Calculer AB.
4) En déduire $A'B'$.

Exercice 10 – Synthèse DNB

Dans un repère orthonormé, on donne

$$A(-4;2),\quad B(1;5),\quad C(3;-1).$$

On note $A'B'C'$ l'image du triangle ABC par la symétrie centrale de centre $I(1;1)$.

1) Calculer les coordonnées de A', B' et C'.
2) Montrer que $AB = \sqrt{34}$.
3) Donner $A'B'$ en justifiant.
4) Calculer l'aire du triangle ABC.
5) Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$? Justifier.
6) On effectue ensuite l'homothétie de centre I et de rapport 2 appliquée au triangle ABC. Donner les coordonnées de l'image de B et indiquer par quel nombre l'aire est multipliée.

Correction

Exercice 1

1) Il s'agit d'une symétrie centrale.
2) Le point O est le milieu du segment $[AA']$.
3) Oui, une symétrie centrale conserve les longueurs, les angles et les aires.
4) Oui, une symétrie centrale conserve l'orientation d'une figure.

Dans le tableau, l'effet principal de la symétrie centrale est un demi-tour.

Exercice 2

1) On place chaque image de l'autre côté de O, à la même distance, sur la même droite passant par le point et O.
2) $A'(4;-2)$, $B'(2;3)$, $C'(-3;-1)$ et $D'(0;2)$.
3) Seul le centre O a pour image lui-même.

Exercice 3

1) $M'(5;-1)$, $N'(-2;-4)$ et $P'(-3;2)$.
2) L'image de $(x;y)$ par symétrie centrale de centre O est $(-x;-y)$.
3) $MN = \sqrt{(2+5)^2+(4-1)^2} = \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{58}$.
4) $M'N' = \sqrt{58}$ car une symétrie centrale conserve les longueurs.

Exercice 4

1) I est le milieu de $[AA']$.
2) Si $A'(x;y)$, alors $\left(\dfrac{-3+x}{2};\dfrac{5+y}{2}\right) = (1;2)$. Donc $x=5$ et $y=-1$. Ainsi $A'(5;-1)$.
3) Le milieu de $A(-3;5)$ et $A'(5;-1)$ est $\left(\dfrac{-3+5}{2};\dfrac{5-1}{2}\right) = (1;2)$.
4) Pour $B(4;-1)$, on obtient $B'(-2;5)$.

Exercice 5

1) $A'(4;-1)$, $B'(1;-3)$ et $C'(2;2)$.
2) Oui, ils sont superposables car une symétrie centrale conserve les longueurs et les angles.
3) Oui, ils ont le même périmètre et la même aire.
4) Oui, la symétrie centrale conserve l'ordre des sommets : elle conserve l'orientation.

Exercice 6

1) Le centre est le milieu de $[EE']$: $I\left(\dfrac{-2+6}{2};\dfrac{5+(-1)}{2}\right) = (2;2)$.
2) Il est unique car un segment possède un seul milieu.
3) Le milieu de $[FF']$ est $\left(\dfrac{1+7}{2};\dfrac{-4+2}{2}\right) = (4;-1)$.
4) Non, car les milieux ne sont pas les mêmes : $(2;2) \neq (4;-1)$.

Exercice 7

1) Comme O est le milieu de $[AC]$, l'image de A est C.
2) Comme O est le milieu de $[BD]$, l'image de B est D.
3) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu.
4) Dans un parallélogramme de sommets consécutifs A, B, C, on a $D = A + C - B$. Donc $D(-3 + 5 - 2; 1 + (-1) - 4) = (0; -4)$.

Exercice 8

1) $K(-5; 1)$, $L(-3; 3)$, $M(-1; 0)$ et $N(-4; -2)$.
2) $K'(5; -1)$, $L'(3; -3)$, $M'(1; 0)$ et $N'(4; 2)$.
3) Dans une symétrie centrale, le centre est le milieu du segment reliant un point et son image.
4) $K'L' = KL = 2{,}8$ cm car les longueurs sont conservées.
5) Oui, ils ont la même orientation : une symétrie centrale correspond à un demi-tour, contrairement à une symétrie axiale qui inverse l'orientation.

Exercice 9

1) Avec le centre $S(2; -1)$, on utilise $A' = 2S - A$. Ainsi $A'(-1; -5)$, $B'(5; -6)$ et $C'(4; 3)$.
2) Le milieu de $B(-1; 4)$ et $B'(5; -6)$ est $\left(\dfrac{-1+5}{2}; \dfrac{4-6}{2}\right) = (2; -1)$, c'est bien S.
3) $AB = \sqrt{(-1-5)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$.
4) $A'B' = \sqrt{37}$ car une symétrie centrale conserve les longueurs.

Exercice 10

1) Le centre est $I(1; 1)$, donc $A' = 2I - A = (6; 0)$, $B' = 2I - B = (1; -3)$ et $C' = 2I - C = (-1; 3)$.
2) $AB = \sqrt{(1+4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.
3) $A'B' = \sqrt{34}$ car la symétrie centrale conserve les longueurs.
4) On inscrit le triangle dans le rectangle $[-4; 3] \times [-1; 5]$, d'aire $7 \times 6 = 42$. On enlève les trois triangles rectangles extérieurs :
   — coin haut-gauche (A, B) : $\frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7{,}5$,
   — coin haut-droit (B, C) : $\frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$,
   — coin bas-gauche (A, C) : $\frac{1}{2} \times 7 \times 3 = 10{,}5$.

   Donc $\mathcal{A} = 42 - 7{,}5 - 6 - 10{,}5 = 18$ unités d'aire.
5) L'aire de $A'B'C'$ est 18 unités d'aire car une symétrie centrale conserve les aires.
6) Par homothétie de centre I et de rapport 2, l'image de B est $I + 2(B - I) = (1; 1) + 2(0; 4) = (1; 9)$. Les longueurs sont multipliées par 2, donc les aires par $2^2 = 4$.