

I. Proportionnalité et fonctions linéaires

A. Généralités

1. Tableau de proportionnalité

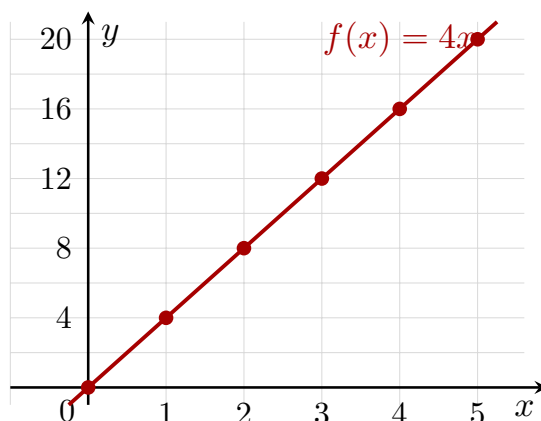
Définition

Un tableau est un **tableau de proportionnalité** si les termes de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par un même nombre, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Côté d'un carré (cm)	1	2	3	4	5	10	4,1
Périmètre (cm)	4	8	12	16	20	40	16,4

Ce tableau est un tableau de proportionnalité ; le coefficient est 4.

2. Graphique



Les points sont **alignés avec l'origine** du repère. Le coefficient 4 se lit graphiquement : lorsqu'on avance de 1 sur l'axe des abscisses, on monte de 4 sur l'axe des ordonnées.

B. Fonctions linéaires

1. La notion de fonction : « l'usine »



La fonction linéaire f qui à x associe $4x$ se note :

$$f : x \mapsto 4x \quad \text{ou} \quad f(x) = 4x$$

On a $f : 5 \mapsto 20$, ou $f(5) = 20$. De même $f(3) = 12$ signifie : par la fonction f , l'image de 3 est 12.

2. Fonction linéaire et proportionnalité

Propriété

À chaque situation de proportionnalité correspond une fonction linéaire. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite passant par l'origine** du repère.

3. Un exemple détaillé : les pourcentages

Un magasin augmente tous ses prix de 15 %. Compléter le tableau.

Prix avant (€)	24,40	48,80	?	25	?
Prix après (€)	28,06	?	1122,4	?	33,12

Correction.

Prix avant (€)	24,40	48,80	976	25	28,80
Prix après (€)	28,06	56,12	1122,4	28,75	33,12

En pratique, on utilise la fonction linéaire $g : x \mapsto 1,15x$ pour calculer le nouveau prix, car :

$$x + 0,15x = (1 + 0,15)x = 1,15x$$

On a facilement $g(100) = 115$, $g(0) = 0$. Retrouver un prix avant augmentation revient à chercher un antécédent, c'est-à-dire à diviser par 1,15 :

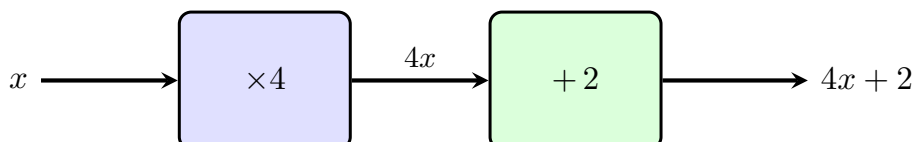
$$\frac{33,12}{1,15} = 28,8$$

4. D'autres exemples

D'autres situations classiques relèvent de la proportionnalité : vitesses moyennes, échelles de plans, agrandissements/réductions, pourcentages, conversions d'unités, prix en fonction de la quantité. Penser à la fonction linéaire associée fait gagner du temps !

II. Fonctions affines

A. Avec « l'usine »



Définition

Une **fonction affine** est un mécanisme qui effectue successivement deux opérations sur un nombre : il le **multiplie** par un nombre donné, puis il **ajoute** un nombre donné.

Ici $h : x \mapsto 4x + 2$, ou $h(x) = 4x + 2$. Par exemple :

$$h(5) = 4 \times 5 + 2 = 20 + 2 = 22$$

B. Fonction linéaire associée

1. Propriété

Propriété

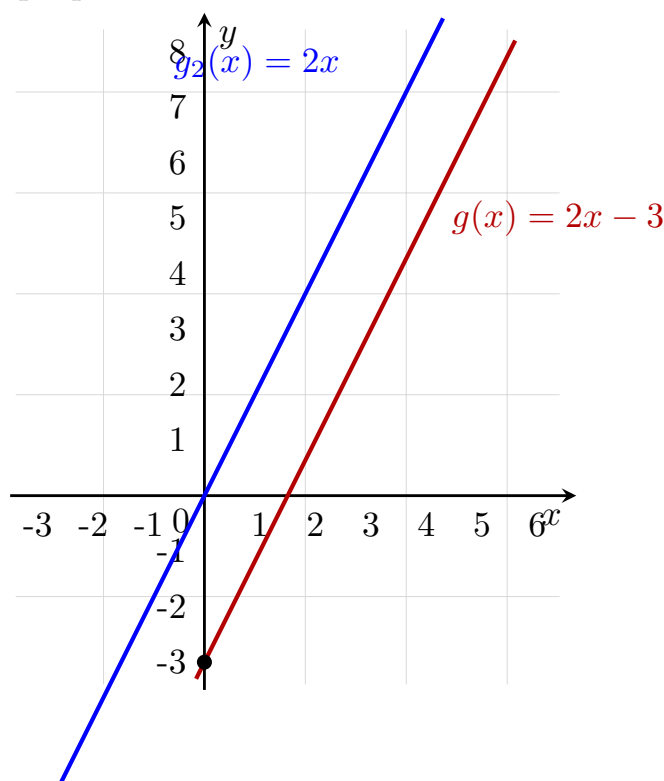
Une fonction linéaire est une fonction affine particulière : $f : x \mapsto 4x$ peut être vue comme $f : x \mapsto 4x + 0$.

2. Définition

Définition

À toute fonction affine, on associe une unique fonction linéaire. À la fonction affine $g : x \mapsto 3x + 5$ on associe la fonction linéaire $g_2 : x \mapsto 3x$.

C. Représentation graphique



La représentation graphique de $g : x \mapsto 2x - 3$ est une droite qui passe par le point $(0; -3)$, appelé **ordonnée à l'origine**. Son **coefficient directeur** est 2. Cette droite est **parallèle** au graphe de la fonction linéaire associée $g_2 : x \mapsto 2x$.

D. Problème type brevet

Un artisan propose deux tarifs pour la pose de carrelage :

- Tarif A : 25 € par mètre carré posé ;
- Tarif B : forfait de 60 €, puis 20 € par mètre carré.

Un client fait poser x mètres carrés.

1. Exprimer le prix de chaque tarif en fonction de x .
2. Quel tarif est le plus avantageux pour 5 m² ? pour 10 m² ?
3. À partir de combien de m² le tarif B devient-il plus avantageux ?
4. Représenter graphiquement les deux fonctions sur $[0; 20]$.

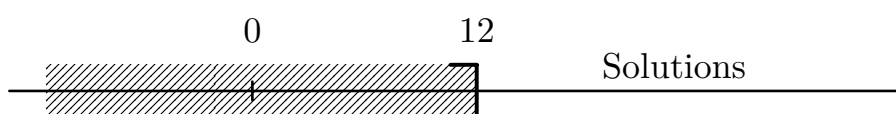
Correction.

1. $f(x) = 25x$ (tarif A) et $g(x) = 20x + 60$ (tarif B).
2. Pour 5 m^2 : $f(5) = 125 \text{ €}$ et $g(5) = 60 + 100 = 160 \text{ €}$ — le tarif A est le plus avantageux. Pour 10 m^2 : $f(10) = 250 \text{ €}$ et $g(10) = 60 + 200 = 260 \text{ €}$ — le tarif A est encore le plus avantageux.
3. On résout l'inéquation :

$$60 + 20x < 25x$$

$$60 < 5x$$

$$x > 12$$



Le tarif B devient plus avantageux au-dessus de 12 m^2 .

4.

