Arithmétique

I. RAPPELS : LES ENSEMBLES DE NOMBRES

1) Les entiers naturels :

Ce sont les nombres que l'on peut compter sur ses doigts.

> ex : 0 ; 1 ; 2 ...

2) Les entiers relatifs :

Ce sont les entiers naturels et leurs opposés.

> ex : ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ...

3) Les nombres rationnels :

Ce sont les résultats des divisions de 2 nombres entiers relatifs.

Si la division tombe juste, on les appelle aussi " décimaux ".

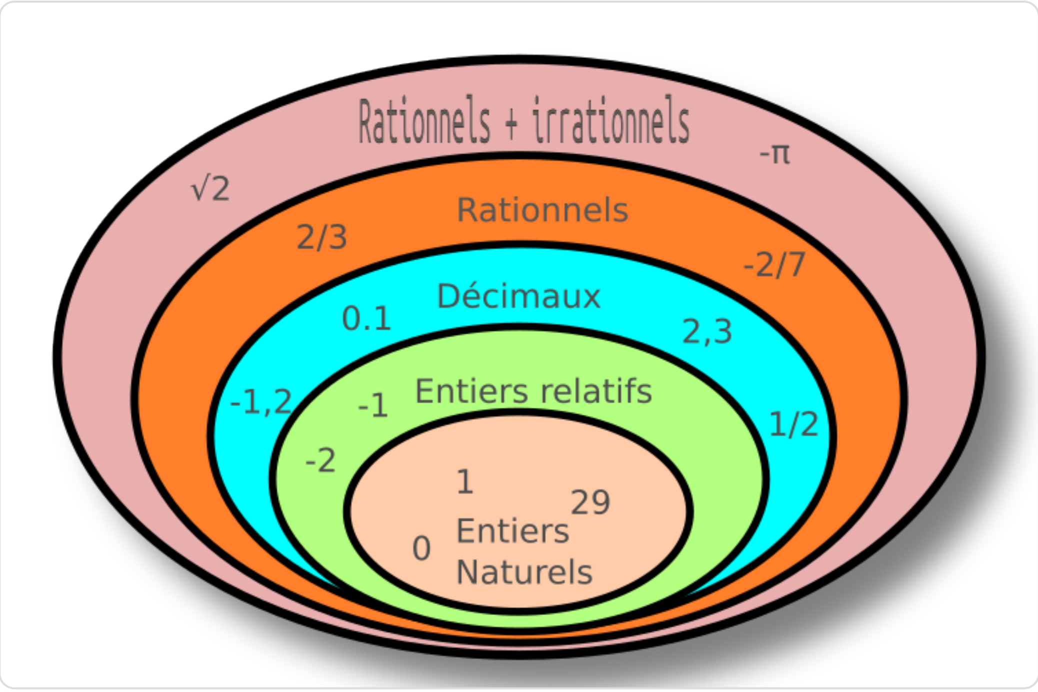
> ex : = 0,5

Certains rationnels sont négatifs.

> ex :-2/3 = -0,66666...

4) Les nombres irrationnels :

> π ; $\sqrt{2}$

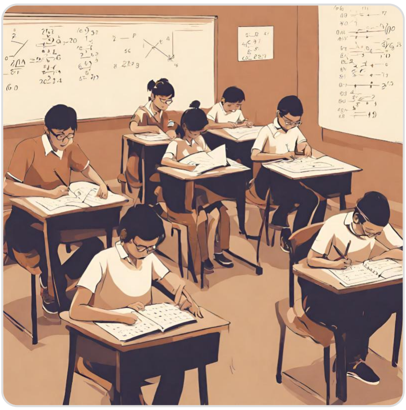


Site2wouf.fr
Arithmétique

II. Exercices témoins, classiques avec les entiers naturels

A. Encadrer un entier par deux multiples consécutifs

Encadre 413 par deux multiples consécutifs de 21



Réponse : On effectue la division euclidienne de 413 par 21 :

$413 = 21 \times 19 + 14$
$413 = 399 + 14$
Donc $399 \leq 413 < 420$

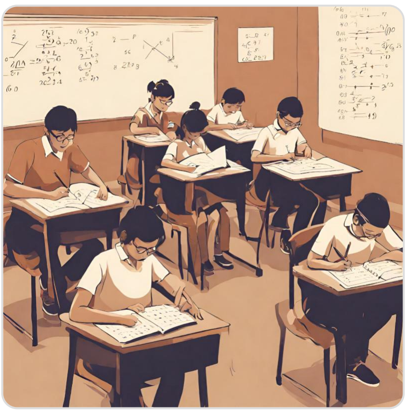
💡***REMARQUE***

On a bien "coincé" 413 entre deux multiples de 21 :

- ***$21 \times 19 = 399$ et***
- ***$399 + 21 = 420 = 21 \times 20$***

B. Trouver le plus grand multiple d'un nombre inférieur à un nombre donné

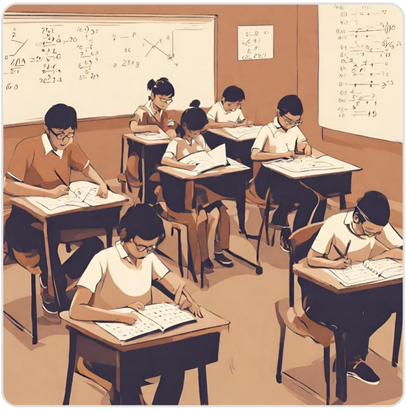
Quel est le plus grand multiple de 27 inférieur à 112 ?



Division euclidienne : $112 = 27 \times 4 + 4$ ***et*** $4 < 27$
Donc le plus grand multiple de 27 inférieur à 112 est
$27 \times 4 = 108 = 112 - 4$

C. Trouver le plus petit multiple d'un nombre supérieur à un nombre donné

Quel est le plus petit multiple de 8 supérieur à 387 ?



Division euclidienne : $387 = 8 \times 48 + 3$ ***et*** $3 < 8$
Donc le plus petit multiple de 8 supérieur à 387 est
$8 \times (48 + 1) = 8 \times 49 = 392$

III. NOMBRES PREMIERS

A. Comprendre la notion de "nombre premier"

> On appelle nombre premier un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Certaines espèces de cigales, notamment en Amérique du Nord (genre Magicicada), ont un cycle de vie souterrain incroyablement long et précis : elles émergent tous les 13 ans ou tous les 17 ans.

Pourquoi 13 ou 17 ans ?

Lire sur le blog

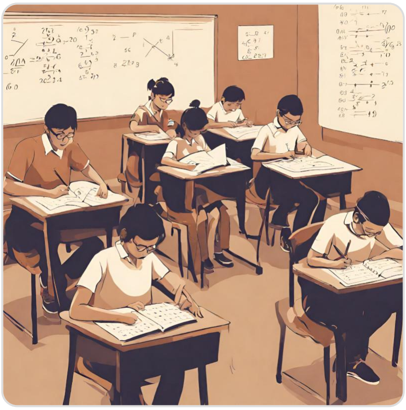
B. les premiers nombres premiers

Les 100 premiers nombres premiers

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

C. Décomposer un nombre en facteurs premiers

Décompose 1350 en facteurs premiers.



On divise successivement 1350 par des facteurs premiers "qui vont bien" (En se servant de la liste ci-dessus et éventuellement des [critères de divisibilités](#))

Décomposition en facteurs premiers :

1350	2
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5

$$1350 =$$
$$2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 =$$
$$2 \times 3^3 \times 5^2$$

IV. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX NOMBRES :

A. Définition 1

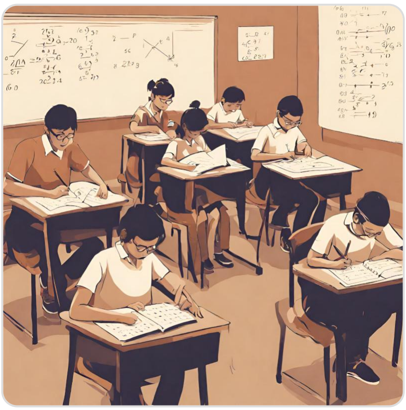
a et k étant deux entiers naturels avec k différent de 0. Lorsque a/k est un entier naturel, on dit que k est un diviseur de a. (c'est à dire quand le reste de la division euclidienne de a par k est zéro)

(On dit aussi que a est un multiple de k, ou encore que a est divisible par k)

> Exemples : 18 = 2 x 9
> 2 est un diviseur de 18 et 9 est un autre diviseur de 18.

B. Lister les diviseurs d'un entier naturel

Donne la liste des diviseurs de 260



On peut commencer par décomposer 260 en facteurs premiers, comme dans l'exercice témoin précédent :
$260 = 2 \times 2 \times 5 \times 13$
Les diviseurs de 260 sont donc :

- 1
- 2
- $2 \times 2 = 4$
- 5
- $2 \times 5 = 10$
- 13
- $2 \times 2 \times 5 = 20$
- $2 \times 13 = 26$
- $2 \times 2 \times 13 = 52$
- $5 \times 13 = 65$
- $2 \times 5 \times 13 = 130$
- $2 \times 2 \times 5 \times 13 = 260$

> *Et on écrit (en notation ensembliste):*
> *260 : {1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 13 ; 20 ; 26 ; 52 ; 65 ; 130 ; 260}*

Un truc amusant: si on multiplie l'un des facteurs par son "copain" (Le premier avec le dernier, le deuxième avec l' avant dernier...) on trouve toujours 260

- 1 × 260 = 260
- 2 × 130 = 260
- 4 × 65 = 260
- ...

> On peux utiliser ce "truc" pour gagner du temps en écrivant la liste des diviseurs d'un entier !

Mais peut-on en déduire que le nombre de facteurs est pair?

Vérifiez dans le cahier d’exercices si c’est toujours vrai avec 144.
Vous verrez que 144 est un contre-exemple.
À votre avis, pourquoi ?

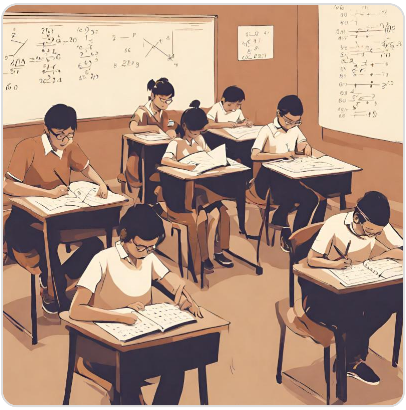
C. Définition 2

Si deux entiers naturels a et b sont divisibles par un même entier naturel k, on dit que k est un diviseur commun de a et b.

Exemple :
36=12x3 et 24=12x2, donc 12 est un diviseur de 36 et 24.
36=8x4,5 et 24=8x3, donc 8 n'est pas un diviseur commun de 36 et 24 car il ne divise pas 36.

Remarque : 1 est un diviseur commun à tous les nombres.

Donne la liste des diviseurs communs à 435 et 135

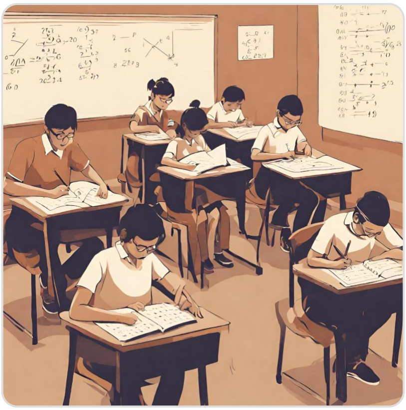


Liste des diviseurs:
435 : {1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 29 ; 87 ; 145 ; 435}
135 : {1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 15 ; 27 ; 45 ; 135}
La liste des diviseurs commun à 435 et 135 est:
{1 ; 3 ; 5 ; 15}

D. Notation

si a et b désignent deux nombres entiers relatifs, on note PGCD(a ; b) le plus grand des diviseurs positifs communs à a et b.

Quel est le plus grand diviseur commun de 24 et 36?



La liste des diviseurs de 24 est :
{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12; 24}

La liste des diviseurs de 36 est :
{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ;12 ; 18 ; 36}

24 et 36 ont 6 diviseurs communs :
{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12}

Le plus grand d'entre eux est 12, c'est le plus grand diviseur commun de 24 et 36.
On note PGCD(24 ; 36) = PGCD(36 ;24) = 12

V. ALGORITHMES DE RECHERCHE DU PGCD :

A. Algorithme des différences :

Pour déterminer PGCD(295 ; 177), on effectue les soustractions successives :

- 295-177=118
- 177-118=59
- 118-59=59

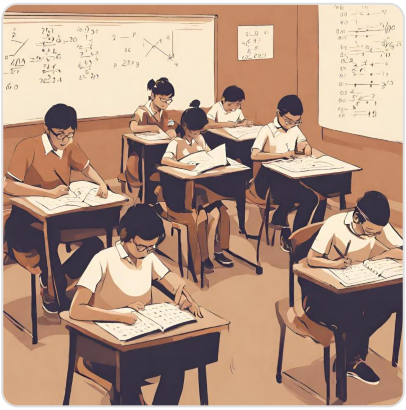
- On prend les deux nombres et on les soustrait.
- On prend les deux plus petits et on recommence.

• On s'arrête lorsque l'on obtient deux nombres égaux.

Propriété :

> Le plus grand diviseur commun est le dernier reste non nul dans la succession des différences de l'algorithme.

Quel est le PGCD de 150 et 40? (algorithme des soustractions successives)



Calcul du PGCD de 150 et 40 par soustractions successives :
150 – 40 = 110
110 – 40 = 70
70 – 40 = 30
40 – 30 = 10
30 – 10 = 20
20 – 10 = 10
PGCD(150 ; 40) = 10

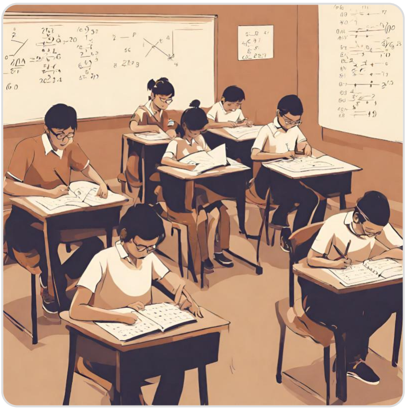
B. l'algorithme d'Euclide.

Pour déterminer PGCD(252 ; 360) :

- Effectuer la division euclidienne du plus grand des deux nombres par le plus petit :
  360 = 252 x 1 + 108
- Effectuer la division euclidienne du diviseur par le reste de la division précédente, jusqu'à ce que le reste de la division soit égal à 0.
- 252 = 108 x 2 + 36
- 108 = 36 x 3 + 0

> Le plus grand diviseur commun est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide.(ici 36)

Déterminez le PGCD de 48 et 70 par l'algorithme d'Euclide.



Algorithme d'Euclide :
$48 = 70 \times 0 + 48$
$70 = 48 \times 1 + 22$
$48 = 22 \times 2 + 4$
$22 = 4 \times 5 + 2$
$4 = 2 \times 2 + 0$
$PGCD\ (48\ ;\ 70) = 2$

VI. Plus Petit Commun Multiple (PPCM) :

A. Définition

> Le PPCM de deux nombres est le plus petit entier naturel qui est un multiple commun à ces deux nombres.

💡***REMARQUE***

Le PPCM est souvent utilisé pour trouver un dénominateur commun quand on additionne ou soustrait des fractions.

B. Exemple

Exemple :
Les multiples de 4 sont : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...
Les multiples de 6 sont : 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...
Les multiples communs sont : 12, 24, 36, ...
Le plus petit d'entre eux est 12 : on dit que PPCM(4 ; 6) = 12

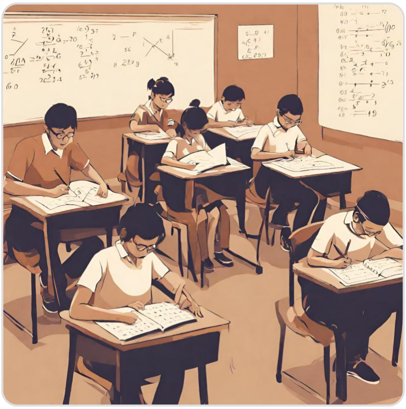
C. En utilisant la décomposition

$4 = 2^2$
$6 = 2 \times 3$
Un multiple de 4 et 6 devra (au minimum) être multiple de $2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$
PPCM(4 ; 6) = 12

D. Exercice témoin, type Brevet

Deux ampoules clignotent.
L'une s'allume toutes les 9 min et 48 s et l'autre toutes les 5 min et 48 s .
À minuit, elles s'allument ensemble.

Détermine l'heure à laquelle elles s'allumeront de nouveau ensemble.



Temps en secondes:

Ampoule 1 : $9 \times 60 + 48 = 588$
Ampoule 2 : $5 \times 60 + 48 = 348$

Décomposition en facteurs premiers:

$588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$
$348 = 2^2 \times 3 \times 29$

Plus petit multiple commun:

$2^2 \times 3 \times 7^2 \times 29 = 17052$

Conversion et conclusion

$17052 = 284 \times 60 + 12$
$284 = 4 \times 60 + 44$
$\rightarrow$ ***4 h 44 min 12 s.***

> ***les ampoules s'allumeront de nouveau ensemble à 4 heures 44 minutes et 12 secondes.***

VII. NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX. FRACTIONS IRREDUCTIBLES :

A. Nombres premiers entre eux :

On dit que deux nombres a et b sont premiers entre eux lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1.

Exemples :

1) 10 et 7 sont premiers entre eux ; en effet :
les diviseurs de 10 sont { 1 ; 2 ; 5 ; 10 }
les diviseurs de 7 sont { 1 ; 7 }
donc PGCD(10 ; 7) = 1 et 10 et 7 sont premiers entre eux.

2) 221 et 69 sont premiers entre eux ; en effet, en appliquant l'algorithme d'Euclide,

- 221 = 69 x 3 + 14
- 69 = 14 x 4 + 13
- 14 = 13 x 1 + 1
- 13 = 1 x 13 + 0

donc PGCD(221 ; 69) = 1.

B. Fraction irréductible :

On dit qu'une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemples : PGCD(10 ; 7) = 1 donc $\frac{10}{7}$ est une fraction irréductible.

C.Propriété :

Lorsque l'on simplifie une fraction par le plus grand diviseur commun à son numérateur et son dénominateur, la fraction obtenue est irréductible.

Exemples :
On sait que PGCD(252 ; 360) = 36 donc :

$$\frac{252}{360} = \frac{252 : 36}{360 : 36} = \frac{7}{10} \text{ est une fraction irréductible.}$$