

## I. Rappels : les ensembles de nombres

- Les **entiers naturels** : ceux que l'on compte (0 ; 1 ; 2 ; ...).
- Les **entiers relatifs** : les entiers naturels et leurs opposés.
- Les **nombres rationnels** : les quotients de deux entiers relatifs ( $\frac{1}{2} = 0,5$  ;  $-\frac{2}{3} = -0,6666\dots$ ).
- Les **nombres irrationnels** : ceux qui ne sont pas rationnels ( $\pi$  ;  $\sqrt{2}$ ).

## II. Multiples et division euclidienne

### A. Encadrer un entier par deux multiples consécutifs

Encadrer 413 par deux multiples consécutifs de 21 :

$$413 = 21 \times 19 + 14$$

$$399 \leq 413 < 420$$

### B. Le plus grand multiple inférieur à un nombre

Le plus grand multiple de 27 inférieur à 112 :

$$112 = 27 \times 4 + 4$$

$$27 \times 4 = 108$$

### C. Le plus petit multiple supérieur à un nombre

Le plus petit multiple de 8 supérieur à 387 :

$$387 = 8 \times 48 + 3$$

$$8 \times (48 + 1) = 8 \times 49 = 392$$

## III. Nombres premiers

### A. Définition

#### Définition

Un **nombre premier** est un entier naturel qui possède exactement **deux diviseurs distincts** : 1 et lui-même.

Les premiers d'entre eux : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... (1 n'est pas premier).

### B. Décomposer en facteurs premiers

On divise successivement 1350 par des facteurs premiers :

|      |  |   |
|------|--|---|
| 1350 |  | 2 |
| 675  |  | 3 |
| 225  |  | 3 |
| 75   |  | 3 |
| 25   |  | 5 |
| 5    |  | 5 |
| 1    |  |   |

$$1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2$$

## IV. Diviseurs et PGCD

### A. Diviseur

### Définition

$k$  (non nul) est un **diviseur** de  $a$  lorsque le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $k$  est **zéro** ; on dit aussi que  $a$  est un **multiple** de  $k$ .

### B. Lister les diviseurs

À partir de la décomposition  $260 = 2^2 \times 5 \times 13$ , on combine les facteurs :

$$260 : \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 13 ; 20 ; 26 ; 52 ; 65 ; 130 ; 260\}$$

### Remarque

En multipliant les diviseurs « par paires » (le premier avec le dernier...) on retrouve 260 :  
 $1 \times 260 = 2 \times 130 = 4 \times 65 = 260$ . Cela fait gagner du temps pour écrire la liste.

### C. Diviseur commun

#### Définition

Si deux entiers  $a$  et  $b$  sont divisibles par un même entier  $k$ , alors  $k$  est un **diviseur commun** de  $a$  et  $b$  (1 est diviseur commun à tous).

### D. Le PGCD

#### Définition

Le **PGCD**( $a ; b$ ) est le plus grand des diviseurs positifs communs à  $a$  et  $b$ .

Diviseurs de 24 :  $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$  ; de 36 :  $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$ . Communs :  $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12\}$ , donc :

$$\text{PGCD}(24 ; 36) = 12$$

## V. Algorithmes de recherche du PGCD

### A. Algorithme des différences

On soustrait les deux nombres, on garde les deux plus petits et on recommence jusqu'à obtenir deux nombres égaux. PGCD(150 ; 40) :

$$150 - 40 = 110$$

$$110 - 40 = 70$$

$$70 - 40 = 30$$

$$40 - 30 = 10$$

$$30 - 10 = 20$$

$$20 - 10 = 10$$

$$\text{PGCD}(150 ; 40) = 10$$

### B. Algorithme d'Euclide

### Propriété

On divise le plus grand par le plus petit, puis le diviseur par le reste, jusqu'à un reste nul. Le **dernier reste non nul** est le PGCD.

PGCD(252 ; 360) :

$$360 = 252 \times 1 + 108$$

$$252 = 108 \times 2 + 36$$

$$108 = 36 \times 3 + 0$$

$$\text{PGCD}(252 ; 360) = 36$$

## VI. PPCM

### A. Définition

#### Définition

Le **PPCM** de deux nombres est le plus petit entier naturel qui est un multiple commun aux deux. Il sert notamment à trouver un dénominateur commun.

### B. Exemple

Multiples de 4 : 4, 8, 12, 16, ... ; de 6 : 6, 12, 18, ... Le plus petit multiple commun est 12 :

$$\text{PPCM}(4 ; 6) = 12$$

### C. Avec la décomposition

$4 = 2^2$  et  $6 = 2 \times 3$  : un multiple commun contient au minimum  $2^2 \times 3$ , d'où  $\text{PPCM}(4 ; 6) = 12$ .

### D. Exercice type Brevet

Deux ampoules s'allument toutes les 9 min 48 s (588 s) et toutes les 5 min 48 s (348 s). Elles s'allument ensemble à minuit ; quand de nouveau ?

$$588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$$

$$348 = 2^2 \times 3 \times 29$$

$$\text{PPCM} = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 29 = 17\,052 \text{ s}$$

Or  $17\,052 = 4 \times 3600 + 44 \times 60 + 12$  : elles se rallument ensemble à **4 h 44 min 12 s**.

## VII. Nombres premiers entre eux, fractions irréductibles

### A. Nombres premiers entre eux

#### Définition

Deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur PGCD est égal à 1. Par exemple 10 et 7 (diviseurs de 10 :  $\{1 ; 2 ; 5 ; 10\}$ , de 7 :  $\{1 ; 7\}$ ).

### B. Fraction irréductible

Une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. On y parvient en divisant par leur PGCD :

$$\frac{156}{260} = \frac{156 \div 52}{260 \div 52} = \frac{3}{5}$$