Équations de A à Z .
Exemples commentés

Avant propos

Cette page est constituée de 17 exercices témoins au sujet des équations. Il est recommandé avant toute chose de relire la leçon Equations et inéquations.
Cette page n'est pas figée et les 17 exemples qui suivent peuvent s'enrichir de nouveaux cas :

- ***Un cas original vu en classe***
- ***Une question «We are here !»***
- ***Une question Facebook***

> ***N'hésitez pas à vous auto évaluer avec la cible ci-dessous !***

Résoudre :

1. $x + 7 = 100$

2. $x \times 4 = 100$

3. $2x + 5 = 21$

4. $3(x + 2) = 300$

5.

$$4x + 7 = 3x - 3$$

6.

$$3x + 5 = -11x + 8$$

7.

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$$

8.

$$\frac{x}{11} = \frac{5}{32}$$

9.

$$3x = \frac{2}{3}x + 5$$

10.

$$-8x = 0$$

11.

$$x^2 = 25$$

12.

$$4x^2 = 9$$

13.

$$(3x - 1)(2x + 5) = 0$$

14.

$$7(3x - 1)x = 0$$

15.

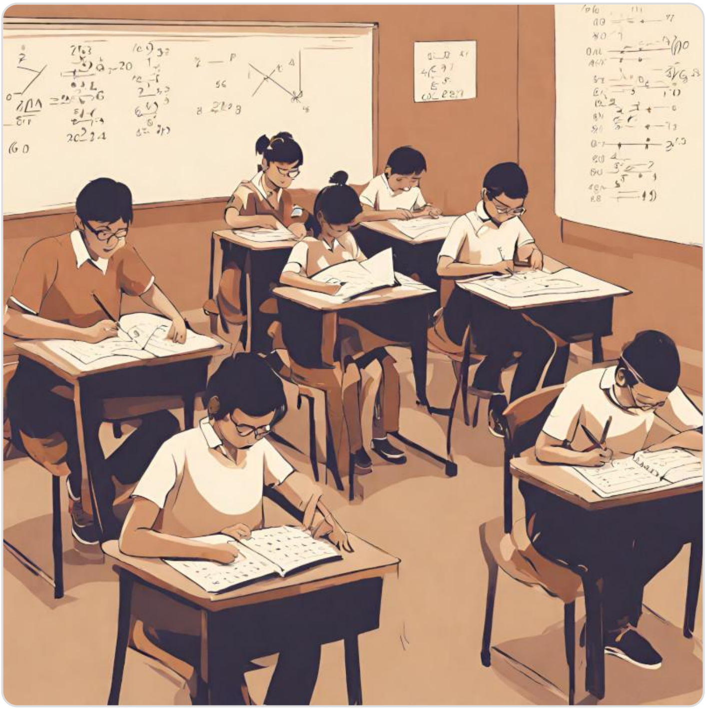
$$(2x - 3)^2 = (5x + 1)^2$$

16.

$$x + 2 = x + 5$$

17.

$$2x + 4 = 2(x + 2)$$



Corrections :

1

$$x + 7 = 100$$

Ici on remarque que l'inconnue x se situe dans une somme «x + 7» et n'apparaît que d'un seul côté de l'égalité.

Propriété 1 :

> Une égalité ne change pas quand on ajoute (ou soustrait) un même nombre à ses deux membres.

En enlevant 7 aux deux membres de l'équation, on obtient :

$$x + 7 - 7 = 100 - 7$$

Soit :

$$x = 93$$

Et, pour écrire que l'ensemble des solutions est un singleton (ensemble à un seul élément) ne contenant que la valeur 93 :

$$S = \{93\}$$

Une façon de penser alternative

Cette façon "de penser" est justifiée par la méthode précédente.

$$x + 7 = 100$$

On transpose +7

(étymologiquement on pose +7 de l'autre côté du signe égal.) Pour cela on déplace +7 en prenant son opposé de l'autre côté du signe égal (-7) :

$$x = 100 - 7$$

$$x = 93$$

$$S = \{93\}$$

Vérification

93 + 7 = 100 ✅

↑ Retour aux énoncés

2

$$x \times 4 = 100$$

Ici on remarque que l'inconnue (x) se situe dans un produit ($x \times 4$) et n'apparaît que d'un seul côté de l'égalité.

Propriété 2 :

> Une égalité ne change pas quand on multiplie (ou divise) ses deux membres par un même nombre non nul.

En divisant par 4 les deux membres de l'équation, on obtient :

$$\frac{x \times 4}{4} = \frac{100}{4}$$

Soit :

$$x = 25$$

$$S = \{25\}$$

Une façon de penser alternative

$$x \times 4 = 100$$

Cette façon «de penser» est justifiée par la méthode précédente.

On divise par le coefficient (non nul) de x (4)

$$x = \frac{100}{4} = 25$$

$$S = \{ 25 \}$$

Vérification

25 × 4 = 100 ✅

↑ Retour aux énoncés

3

$$2x + 5 = 21$$

Ici notre plan va être de commencer par isoler le terme en x ($2x$) d'un côté du signe égal...

On transpose 5

$$2x = 21 - 5 = 16$$

On divise par le coefficient non nul 2

$$x = \frac{16}{2} = 8$$

$$S = \{ 8 \}$$

Vérification

$$2 \times 8 + 5 = 16 + 5 = 21$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

4

$$3\,(x + 2) = 300$$

Ici, la méthode traditionnelle voudrait qu'on développe le premier membre pour retomber sur un exemple similaire au 3. Mais il y a plus simple, nous le verrons ensuite.

Je développe le premier membre :

$$3x + 6 = 300$$

Je transpose 6.

$$3x = 300 - 6 = 294$$

Je divise par le coefficient de x :

$$x = \frac{294}{3} = 98$$

$$S = \{ 98 \}$$

Remarque

$$3\,(x + 2) = 300$$

300 étant un multiple de 3 il aurait été plus intéressant d'utiliser la propriété 2 et de diviser les deux membres par 3 :

$$x + 2 = 100$$

Et de transposer 2

$$x = 100 - 2 = 98$$

$$S = \{ 98 \}$$

💡 ***REMARQUE***

Gain de temps et d'encre !

Vérification

$$3 \times (98 + 2) = 3 \times 100 = 300$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

5

$$4x + 7 = 3x - 3$$

C'est le type le plus classique d'équation du premier degré à une inconnue. Celui qu'on retrouve le plus fréquemment en fin de cycle 4.

On a une expression du type ax + b dans chaque membre de l'égalité.

De façon à n'avoir que des termes en x à gauche du signe égal on effectue une double transposition :

$$4x - 3x = -3 - 7$$

$$x = -10$$

$$S = \{-10\}$$

Vérification

- $$4 \times (-10) + 7 = -40 + 7 = -33$$
- $$3 \times (-10) - 3 = -30 -3 = -33$$

Donc

$$4 \times (-10) + 7 = 3 \times (-10) - 3$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

6

$$3x + 5 = -11x + 8$$

C'est la même méthode que précédemment.

$$3x + 11x = 8 - 5$$

$$14x = 3$$

Et on divise, comme d'habitude par le coefficent de x (non nul)

$$x = \frac{3}{14}$$

$$S = \{\frac{3}{14}\}$$

Vérification

- $$3 \times \frac{3}{14} + 5 = \frac{9}{14} + 5 = \frac{9}{14} + \frac{70}{14} = \frac{79}{14}$$
- $$-11 \times \frac{3}{14} + 8 = \frac{-33}{14} + \frac{112}{14} = \frac{79}{14}$$

$$3 \times \frac{3}{14} + 5 = -11 \times \frac{3}{14} + 8$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

7

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{5}$$

On trouve ce type d'équation du premier degré à une inconnue, avec une égalité de fractions, assez souvent en fin de cycle 4 :

- Quand on étudie le théorème de Thalès
- En trigonométrie

On peut se débrouiller en utilisant plusieurs fois la propriété 2 pour trouver la valeur de x. Mais un moyen mnémotechnique est efficace et rapide : L'égalité fractionnaire montre deux diagonales. L'une d'entre elle ne contient pas l'inconnue, Il suffit de diviser le produit des valeurs de cette diagonale par le nombre restant. D'où :

$$x = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

$$S = \{ 7{,}5 \}$$

💡 ***REMARQUE***

- *Ne pas oublier de simplifier, si possible, la fraction obtenue.*
- *Si cette fraction est un nombre décimal (comme ici) on peut donner la valeur décimale.*
- *dans le cas contraire on peut donner une valeur approchée (Et on le doit si l'énnoncé le demande !)*

Vérification

> On peut vérifier une égalité de fractions en utilisant une méthode un peu démodée mais toujours très efficace. Autrefois, on parlait des « produits des extrêmes et des moyens » ou des « produits en croix ». Il s'agit simplement de vérifier, lorsque deux fractions sont écrites côte à côte, que les produits des deux diagonales sont égaux.

- $$3 \times 5 = 15$$
- $$2 \times \frac{15}{2} = 15$$

$$3 \times 5 = 2 \times \frac{15}{2}$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

8

$$\frac{x}{11} = \frac{5}{32}$$

C'est la même méthode que précédemment.

$$x = \frac{5 \times 11}{32} = \frac{55}{32} \approx 1{,}7$$

$$S = \left\{ \frac{55}{32} \right\}$$

💡 ***REMARQUE***

Dans l'écriture de la solution de manière ensembliste (avec les accolades), on ne fait apparaître que la valeur exacte !

Vérification

Comme dans l'exemple précédent, on vérifie en quelques secondes que les produits des deux diagonales sont égaux (55). ✅

↑ Retour aux énoncés

9

$$3x = \frac{2}{3}x + 5$$

💡 ***REMARQUE***

Pourquoi cet exemple? Parce que vous êtes nombreux à être effrayé par les fractions...

On va commencer par transposer $\frac{2}{3}x$:

$$3x - \frac{2}{3}x = 5$$

On va «gérer» la fraction par une simple mise au même dénominateur :

$$\frac{9}{3}x - \frac{2}{3}x = 5$$

$$\frac{7}{3}x = 5$$

il nous reste à diviser par le coefficient de x , c'est à dire à multiplier par l'inverse de $\frac{7}{3}$:

$$x = 5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7} \approx 2,1$$

$$S = \{ \frac{15}{7} \}$$

Vérification

- $$3 \times \frac{15}{7} = \frac{45}{7}$$
- $$\frac{2}{3} \times \frac{15}{7} + 5 = \frac{10}{7} + \frac{35}{7} = \frac{45}{7}$$

$$3 \times \frac{15}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{15}{7} + 5$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

10

$$-8x = 0$$

Ici, on peut, comme d'habitude, diviser par le coefficient de x , qui est non nul :

$$x = \frac{0}{-8} = 0$$

$$S = \{ 0 \}$$

💡 **REMARQUE**

Mais on peut aussi utiliser les propriétés 3 et 4 :

Propriété 3 :

Si un produit est nul alors l'un des ses facteurs est nul.

Propriété 4 :

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.

Et on a immédiatement :

$$x = 0$$

$$S = \{ 0 \}$$

Vérification

La vérification est ici évidente. ✅

↑ Retour aux énoncés

11

$$x^2 = 25$$

Les dix premiers exemples ont évoqué des équations du premier degré (L'inconnu est sans puissance, ou à la puissance 1). Cette onzième est **une équation du second degré** (à une inconnue).

Pour les résoudre nous utiliserons la factorisation grâce l'identité remarquable :

$$\boxed{\mathbf{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}}$$

En transposant 25, on va d'abord faire apparaître une différence de deux carrés :

$$x^2 - 25 = 0$$

On factorise ensuite à l'aide de l'égalité remarquable :

$$(x - 5)(x + 5) = 0$$

On utilise la propriété 3 :

> **Si un produit est nul alors l'un des ses facteurs est nul.**

On a donc :

$$x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0$$

Et :

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

D'après la propriété 4 :

> **Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.**

Ces valeurs sont bien solutions :

$$S = \{ -5 ; 5 \}$$

Vérification

$$(\pm 5)^2 = 25$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

12

$$4x^2 = 9$$

On peut très vite faire apparaître une différence de deux carrés :

$$4x^2 - 9 = 0$$

On factorise :

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0$$

Si un produit est nul alors l'un des ses facteurs est nul.

On a donc :

$$2x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 3 = 0$$

Et :

$$2x = 3 \quad \text{ou} \quad 2x = -3$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-3}{2}$$

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.

$$S = \{ \frac{-3}{2} ; \frac{3}{2} \}$$

Vérification

$$4 \times (\frac{\pm 3}{2})^2 = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$ ✅

↑ Retour aux énoncés

13

$$(3x - 1)(2x + 5)=0$$

Si un produit est nul alors l'un des ses facteurs est nul.

On a donc :

$$3x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 5 = 0$$

Et :

$$3x=1 \quad \text{ou} \quad 2x =-5$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5}{2}$$

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.

$$S = \left\{ \frac{-5}{2} ; \frac{1}{3} \right\}$$

Vérification

Dans le cas d'un produit nul, il suffit de vérifier que chacune des solutions annulent l'un des facteurs. ✅

↑ Retour aux énoncés

14

$$7\,(3x - 1)\,x = 0$$

Si un produit est nul alors l'un des ses facteurs est nul.

On a donc :

$$3x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Et :

$$3x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.

$$S = \{\, 0\,;\, \frac{1}{3} \,\}$$

Vérification

Dans le cas d'un produit nul, il suffit de vérifier que chacunes des solutions annulent l'un des facteurs. ✅

↑ Retour aux énoncés

15

$$(2x - 3)^2 = (5x + 1)^2$$

Une mauvaise idée pour commencer :

Nombreux sont ceux qui font ici l'erreur suivante : Ils développent.

$$(2x - 3)(2x - 3) = (5x + 1)(5x + 1)$$

$$4x^2 - 6x - 6x + 9 = 25x^2 + 5x + 5x + 1$$

💡 ***REMARQUE***

Ces deux dernières lignes sont inutiles à ceux qui maîtrisent les identités remarquables !

$$4x^2 - 12x + 9 = 25x^2 + 10x + 1$$

En transposant, ils obtiennent :

$$-21x^2 - 22x + 8 = 0$$

Au cycle 4, nous nous trouvons bloqués, et c'est au lycée qu'on apprendra la méthode de résolution !

La bonne idée : Faire apparaître une différence de deux carrés !

$$(2x - 3)^2 = (5x + 1)^2$$

$$(2x - 3)^2 - (5x + 1)^2 = 0$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

$$[(2x - 3) - (5x + 1)]\ [(2x-3) + (5x+1)] = 0$$

$$(2x - 3 - 5x - 1)(2x - 3 + 5x + 1) = 0$$

$$(-3x - 4)(7x - 2) = 0$$

Si un produit est nul alors l'un des ses facteurs est nul.

On a donc :

$$-3x = 4 \quad \text{ou} \quad 7x = 2$$

Et :

$$x = -\frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{7}$$

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.

$$S = \left\{ \frac{-4}{3} ; \frac{2}{7} \right\}$$

Vérifications

1.
   - $$\left(2 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 3\right)^2 = \left(-\frac{8}{3} - \frac{9}{3}\right)^2 = \left(\frac{-17}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$$

- $$\left(5 \times \left(-\frac{4}{3}\right) + 1\right)^2 = \left(-\frac{20}{3} + \frac{3}{3}\right)^2 = \left(\frac{-17}{3}\right)^2 = \frac{289}{9}$$ ✅

2.
- $$\left(2 \times \frac{2}{7} - 3\right)^2 = \left(\frac{4}{7} - \frac{21}{7}\right)^2 = \left(\frac{-17}{7}\right)^2 = \frac{289}{49}$$
- $$\left(5 \times \frac{2}{7} + 1\right)^2 = \left(\frac{10}{7} + \frac{7}{7}\right)^2 = \left(\frac{17}{7}\right)^2 = \frac{289}{49}$$ ✅✅

↑ Retour aux énoncés

16

$$x + 2 = x + 5$$

Vous êtes en train de vous dire : «La difficulté allait croissante et on retourne en arrière ?»
Ici, ce n'est pas la résolution qui est difficile, mais la conclusion !

Après une double transposition, on :

$$0x = 5$$

💡 ***REMARQUE***

Parce qu'on hésite à écrire 0 = 5 ! (Revoir les sens du signe «=»)

A cette étape on devrait diviser par le coefficient de x mais c'est 0.

La division par zéro est interdite.

Il n'existe aucun nombre qui multiplié par zéro donne 5, cette équation n'a aucune solution !
On note:

$$S = \varnothing$$

💡 ***REMARQUE***

Sans les accolades habituelles !

↑ Retour aux énoncés

17

$$2x + 4 = 2(x + 2)$$

$$2x + 4 = 2x + 4$$

$$2x - 2x = 4 - 4$$

$$0x = 0$$

A cette étape on devrait diviser par le coefficient de x mais c'est 0.

La division par zéro est interdite.

Mais tout nombre multiplié par zéro donne zéro : Tous les nombres sont solutions !

Vous verrez plus tard que les nombres que vous connaissez sont les nombres réels. L'ensemble de ces nombre étant noté $\mathbb{R}$.

$$S = \mathbb{R}$$

↑ Retour aux énoncés