

Première partie

I. Perspective

A. Le point de vue de l'artiste

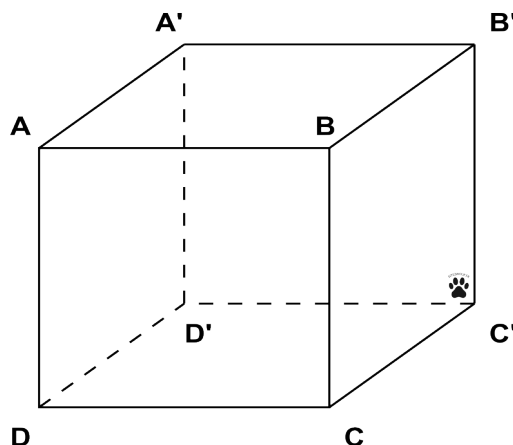


La cité idéale (1475), Piero della Francesca

La **perspective** est l'art de représenter les objets à trois dimensions sur une surface plane, en tenant compte des effets de l'éloignement et de la position dans l'espace par rapport à l'observateur. Pour l'artiste, certaines droites parallèles dans la réalité sont représentées par des droites sécantes.

B. Le point de vue mathématique : la perspective cavalière

En **perspective cavalière**, les parallèles de la réalité sont représentées par des droites parallèles :



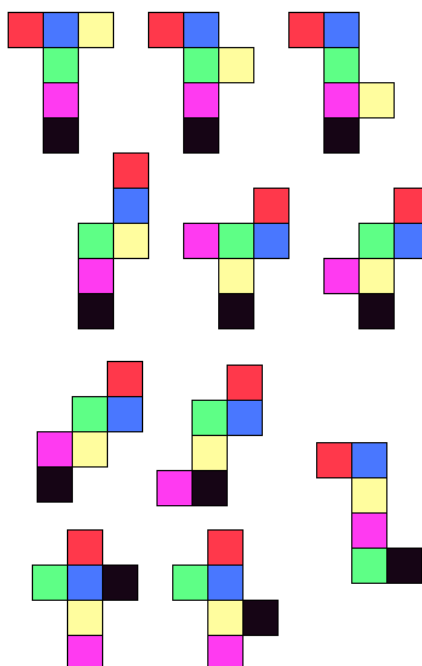
Remarque

Par convention, on représente les arêtes invisibles en **pointillés**. Ainsi la face au premier plan de ce cube est le carré ABCD.

II. Merci patron : le patron d'un solide

A. Une représentation plane : le patron

Dessiner les 11 patrons d'un cube.



B. Définition

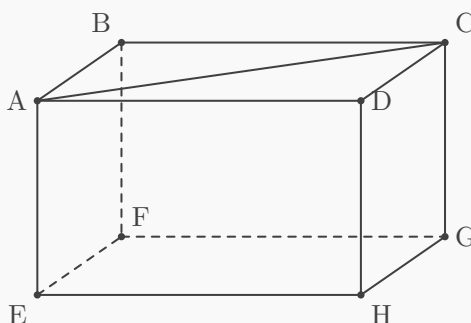
Définition

Un **patron** d'un solide est une figure plane composée de polygones (les faces) disposés de telle manière qu'en les pliant le long de leurs arêtes communes, on reconstitue le solide en trois dimensions sans que les faces ne se chevauchent.

III. Exemples d'exercices classiques au brevet

A. Brevet 2004 Aix-Marseille

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous (figure non à l'échelle). Compléter le tableau (sans justification).

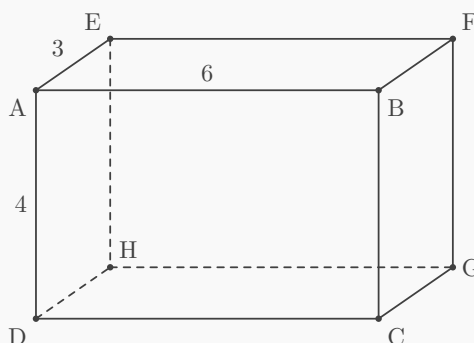


Correction.

Objet	Nature
Triangle ABC	Rectangle
Angle $\widehat{ABF}$	Droit
Quadrilatère ABFE	Rectangle
Angle $\widehat{ACG}$	Droit
Quadrilatère ACGE	Rectangle

B. Brevet 2005 Aix-Marseille

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. On donne $AE = 3$ m ; $AD = 4$ m ; $AB = 6$ m.



1. **a.** Que dire des droites (AE) et (AB) ? **b.** Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes? **2.**
a. Calculer EG (valeur exacte). **b.** Dans EGC rectangle en G , calculer la diagonale $[EC]$. **3. a.**
Montrer que le volume vaut 72 m³. **b.** Montrer que l'aire totale vaut 108 m².

Correction.

1. **a.** ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle, ses arêtes sont perpendiculaires deux à deux, donc $(AE) \perp (AB)$. **b.** Les droites (EH) et (AB) ne sont pas coplanaires : elles ne sont donc pas sécantes.

2. **a.** Dans EFG rectangle en F , d'après le théorème de Pythagore :

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$$

$$EG = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ m}$$

b. Dans EGC rectangle en G , d'après le théorème de Pythagore :

$$EC^2 = EG^2 + GC^2 = 52 + 3^2 = 52 + 9 = 61$$

$$EC = \sqrt{61} \text{ m}$$

3. **a.**

$$V = 3 \times 4 \times 6 = 72 \text{ m}^3$$

b.

$$A = 2 \times (3 \times 4 + 3 \times 6 + 4 \times 6) = 2 \times 54 = 108 \text{ m}^2$$

C. Remarque

Remarque

Les exercices classiques de l'espace ne sont que des exercices habituels : il s'agit de trouver le **plan** dans lequel on travaille!

Deuxième partie

I. Les solides « sans pointe »

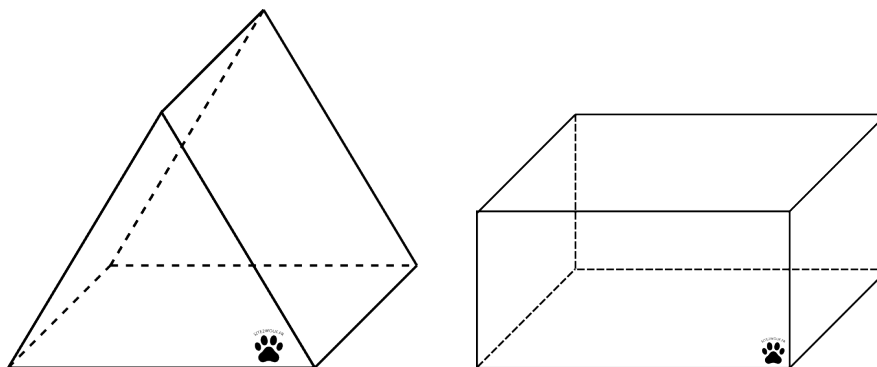
A. Les prismes droits

1. Définition

Définition

On appelle **prisme droit** un solide dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des rectangles.

2. Exemples

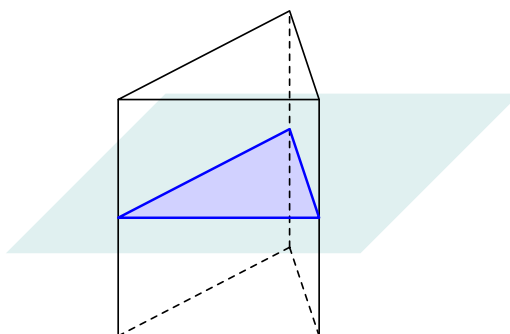


Le prisme droit à base triangulaire a 6 sommets, 9 arêtes et 5 faces. Le prisme droit à base rectangulaire (pavé droit) a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces.

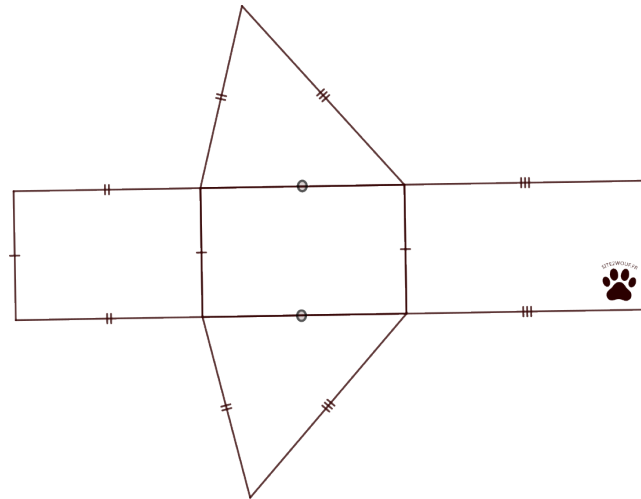
3. Section par un plan parallèle à la base

Définition

Quand on coupe un prisme droit par un plan parallèle à la base, la section trouvée est identique à la base.



4. Patrons



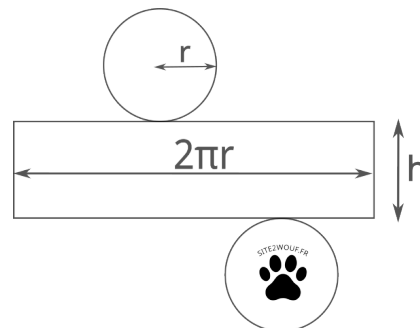
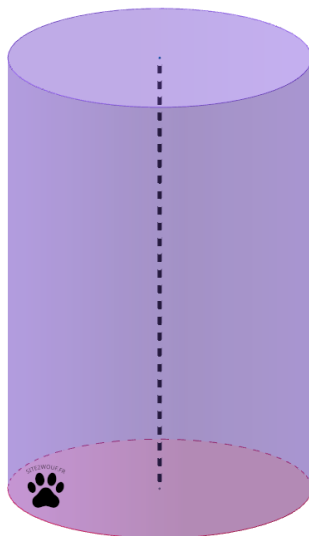
5. Volume

Propriété

$$V = B \times h$$

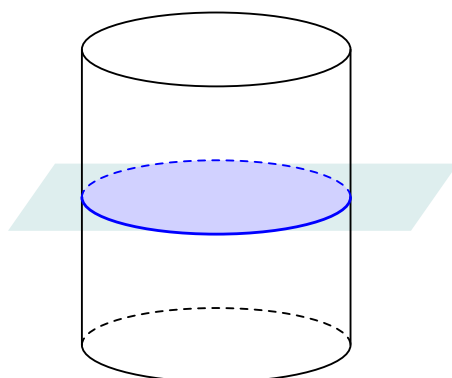
où B désigne l'aire de la base et h la hauteur du prisme.

B. Cylindre de révolution



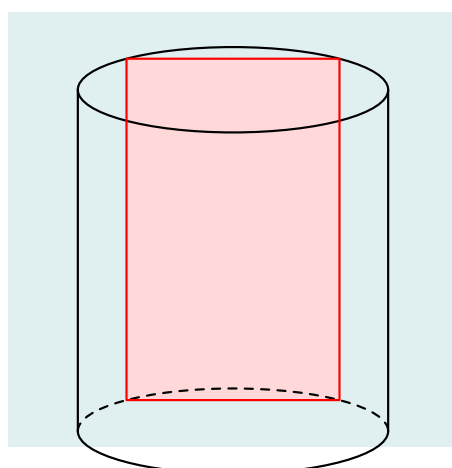
Définition

Quand on coupe un cylindre de révolution par un plan parallèle à la base, la section est un cercle de même rayon que la base.



Définition

Quand on coupe un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à la base, la section est un rectangle dont un côté est égal à la hauteur du cylindre.



Propriété

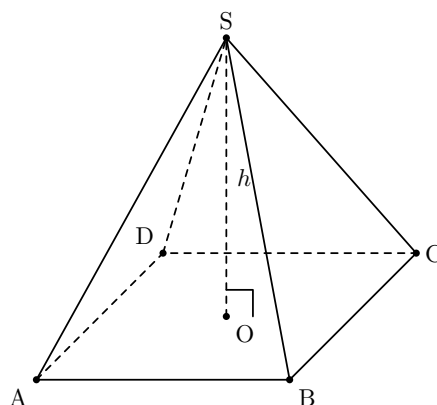
$$V = B \times h = \pi r^2 h$$

II. Les solides pointus

A. Pyramides

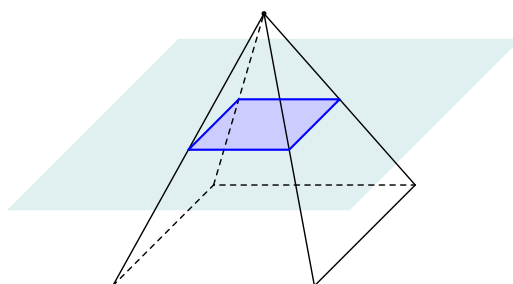
Définition

Les **pyramides** ont pour base des polygones, et leurs faces latérales sont des triangles.



Remarque

Quand on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, la section est de même nature que la base.

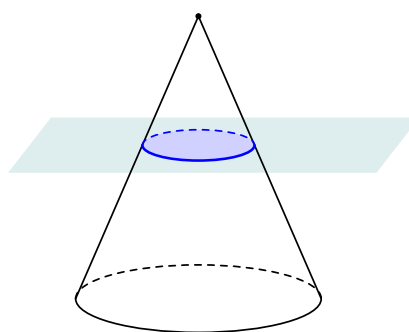
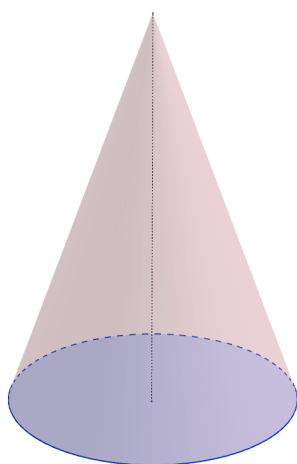


Les **pyramides régulières** ont pour base des polygones réguliers (triangle équilatéral, carré...) et leurs faces latérales sont des triangles isocèles.

Propriété

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h$$

B. Cône de révolution

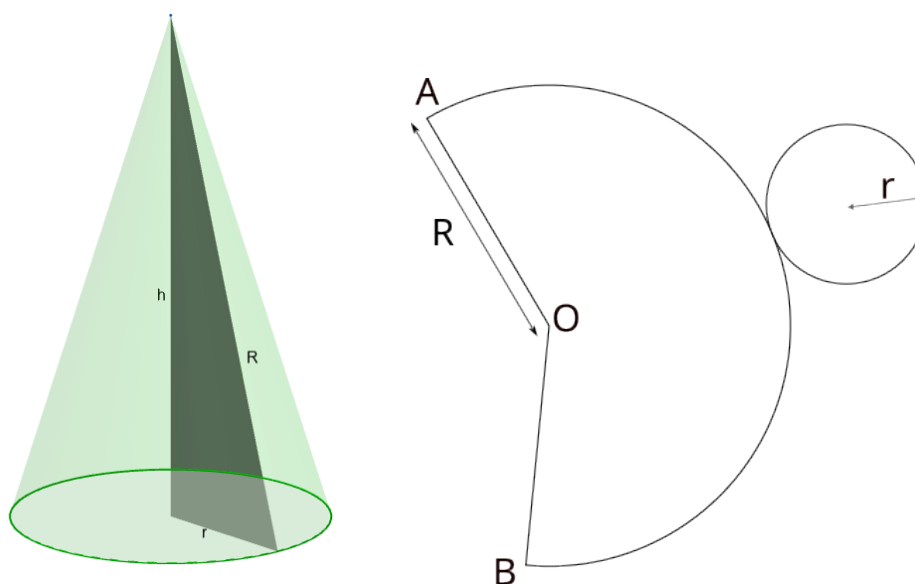


Remarque

Quand on coupe un cône par un plan parallèle à la base, la section est un cercle de rayon inférieur à celui de la base.

Tracer le patron d'un cône de révolution dont la base est un cercle de 3 cm de rayon et de hauteur 4 cm. (Indice : la longueur de l'arc est égale à la circonférence du cercle de base.)

Correction.



On calcule d'abord R , le rayon de l'arc, avec le théorème de Pythagore :

$$R^2 = r^2 + h^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$R = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Puis l'angle $\widehat{AOB}$, par proportionnalité (longueur / angle) :

Longueur	Angle
$2\pi R = 10\pi$	360°
$2\pi r = 6\pi$	$\widehat{AOB}$

$$\widehat{AOB} = \frac{360 \times 6\pi}{10\pi} = 216^\circ$$

Propriété

Volume du cône de rayon r et de hauteur h :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$$

III. La sphère, la boule

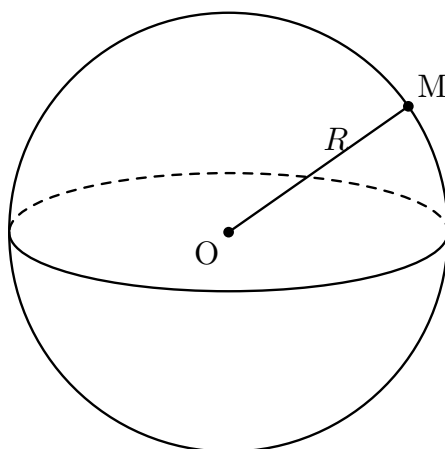
A. Définitions

Définition

Dans un plan, le **cercle** de centre O et de rayon r est constitué de tous les points à exactement r de O ; le **disque** de tous les points dont la distance à O est inférieure ou égale à r .

Définition

La **sphère** de centre O et de rayon r est constituée de tous les points de l'espace à exactement r de O ; la **boule**, de tous les points de l'espace dont la distance à O est inférieure ou égale à r .



Remarque

M et N sont diamétralement opposés. On ne peut pas construire le patron d'une sphère. La section d'une sphère par un plan est un cercle : de rayon R si le plan passe par O , de rayon inférieur sinon.

B. Aire et volume

Théorème

Aire de la sphère :

$$A = 4\pi R^2$$

Volume de la boule :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$