

I. Somme algébrique

A. Définition

Définition

L'**addition** est l'opération qui permet de calculer la **somme** de plusieurs nombres ; ces nombres sont les **termes** de la somme.

Exemples :

- $7 + 2 + 8$ est la somme des termes 7, 2 et 8 ;
- $8 - 3 + 2$ est la somme de 8, -3 et 2 ; on peut l'écrire $8 + (-3) + 2$;
- $a + 5 + b + 7$ est la somme de a , 5, b et 7 ;
- $3a - 2$ est la somme de $3a$ et -2 .

B. Propriété

Propriété

Dans une somme algébrique, on peut changer l'ordre des termes et regrouper les termes de son choix.

Exemples :

$$7 + 2 + 8 = (8 + 2) + 7$$

$$8 - 3 + 2 = 8 + 2 - 3$$

$$a + 5 + b + 7 = (5 + 7) + a + b$$

II. Produit

A. Définition

Définition

La **multiplication** est l'opération qui permet de calculer le **produit** de deux nombres ; ces nombres sont les **facteurs** du produit.

Exemples :

- $7 \times 2 \times 5$ est le produit des facteurs 7, 2 et 5 ;
- $\frac{7}{5}$ peut être considéré comme le produit de 7 par $\frac{1}{5}$;
- a^2 est le produit de a par a ;
- $\frac{a^3}{1+a}$ est le produit de a (3 fois) et de $\frac{1}{1+a}$.

B. Propriété

Propriété

Dans un produit, on peut changer l'ordre des facteurs et regrouper les facteurs de son choix.

Exemple :

$$7 \times 2 \times 5 = (2 \times 5) \times 7$$

III. Expressions algébriques

A. Simplification d'écriture

Définition

Le signe « multiplié » est facultatif devant une lettre ou une parenthèse : $3b$ veut dire $3 \times b$; $k(a + b)$ veut dire $k \times (a + b)$. Mais 37 ne veut pas dire 3×7 !

B. Réduction d'une somme algébrique

Certaines sommes algébriques peuvent être **réduites** :

$$7 + 2 + 8 = (8 + 2) + 7 = 10 + 7 = 17$$

$$a + 5 + b + 7 = 12 + a + b$$

D'autres sont irréductibles : $3a - 2 \dots$ STOP.

C. Reconnaître une expression algébrique

1. Rappel des priorités opératoires

Propriété

Dans l'ordre, on s'occupe :

1. des parenthèses les plus imbriquées ;
2. des puissances ;
3. des produits ;
4. des sommes.

2. Propriété

Propriété

On peut séparer les expressions algébriques en deux types : les **sommes** et les **produits**.

3. Problème

$7 \times 2 + 5$ est-il un produit ou une somme ? Effectuons le calcul en respectant les priorités :

$$7 \times 2 + 5 = 14 + 5 = 19$$

19 est la somme de 14 et 5, c'est-à-dire de 7×2 et 5. Donc $7 \times 2 + 5$ est **la somme** de 5 et du produit de 7 par 2.

D. Développer (un produit)

1. Définition

Définition

Développer (étymologie : enlever l'enveloppe), c'est transformer un produit en somme.

2. Distributivité simple

Propriété

$$k(a + b) = ka + kb$$

Premier membre : produit de k par la somme de a et b . Deuxième membre : somme des produits ka et kb .

3. Distributivité double

Propriété

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

E. Factoriser (une somme)

1. Définition

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

2. Distributivité simple

Propriété

$$ka + kb = k(a + b)$$

Premier membre : somme des produits ka et kb . Deuxième membre : produit de k par la somme de a et b .

IV. Les identités remarquables

A. Exercices

Développer : $A = (a + b)^2$; $B = (a - b)^2$; $C = (a + b)(a - b)$.

Correction.

$$A = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$B = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$C = (a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

B. Boîte à outils

Théorème

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

De la gauche vers la droite, on **développe** ; de la droite vers la gauche, on **factorise**.

C. Vocabulaire

Définition

$(a + b)^2$ est un **produit remarquable**. $a^2 - 2ab + b^2$ est une **somme remarquable**. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est une **identité remarquable** (ou égalité remarquable). $2ab$ est un **double produit**. $a^2 - b^2$ est une **différence de deux carrés**.

V. Utilisation des outils

A. Pour développer

Si on repère un produit remarquable, on peut utiliser l'identité correspondante pour développer plus rapidement :

$$(y - 10)^2 = y^2 - 20y + 100$$

est plus rapide que :

$$(y - 10)^2 = y^2 - 10y - 10y + 10 \times 10 = y^2 - 20y + 100$$

B. Pour factoriser

Si on repère une somme remarquable, on peut l'utiliser pour factoriser (on ne dispose d'ailleurs pas d'autre méthode) :

$$4a^2 - 4a + 1 = (2a)^2 - 2 \times 2a + 1 = (2a - 1)^2$$

$$16 - 9x^2 = 4^2 - (3x)^2 = (4 - 3x)(4 + 3x)$$

$$(x + 5)^2 - 4 = (x + 5 - 2)(x + 5 + 2) = (x + 3)(x + 7)$$

C. Pour calculer astucieusement

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 + 1 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$$