Racines Carrées

I Introduction

A Définition

Soit a un nombre positif

Il existe un nombre b positif unique tel que $b^2=a$.

On appelle b : racine de a

et on note $b=\sqrt{a}$

B Exemples:

$\sqrt{16}=4 \ car \ 4\times4=16$

C Attention:

On ne parle de racine que pour *un nombre positif*

D Remarques:

1 remarque évidente:

D'après la définition, pour a positif on a:

$$(\sqrt{a})^2=a$$

2 remarque étonnante:

Le symbole utilisé pour écrire les racines peut faire penser à un V, mais c'est un R stylisé. *Mais pas le R de racine, celui de « **Radical** ». En effet pour parler des racines carrés, on peut aussi employer le mot « **radicaux** ».*

II Multiplications de racines

A Propriété

Si a et b sont des nombres positifs:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

démonstration:

D'après la définition $\sqrt{ab}$ est le nombre unique c tel que c²=ab

or $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=ab$ donc le premier membre est aussi égal à ce nombre c qui a pour carré ab.

B Exemple

Montrer que le produit de la racine de 2, par la racine de 8 est égal à 4.

C Application: simplification de racines:

1 remarque, pour a positif :

$$\sqrt{a^2}=\sqrt{a\times a}=\sqrt{a}\times\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a$$

$$\sqrt{a^2 b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$$

2 Concrètement :

Simplifier la racine de 32

$$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

3 Exercice classique de type Brevet

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ ***avec b le plus petit possible:***

$E=\sqrt{3}-2\sqrt{27}+\sqrt{300}$

$$E=\sqrt{3}-2\sqrt{27}+\sqrt{300}$$
$$E=\sqrt{3}-2\sqrt{9\times 3}+\sqrt{100\times 3}$$
$$E=\sqrt{3}-2\times\sqrt{9}\times\sqrt{3}+\sqrt{100}\times\sqrt{3}$$
$$E=\sqrt{3}-2\times 3\sqrt{3}+10\times\sqrt{3}$$
$$E=\sqrt{3}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}$$
$$E=5\sqrt{3}$$

III Quotient de racines

A Propriété

Si a et b sont des nombres positifs, et b non nul

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

démonstration :

idem II (en exercice)

B Exemple

Montrer que le quotient de racine de 27 par racine de 3 est égal à 3

C Application

Écrire $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ***sous la forme d'une fraction sans racine au dénominateur***

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

INSTRUCTIONS OFFICIELLES

CONTENUS

- Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées).
- Racine carrée d'un nombre positif.
- Produit et quotient de 2 radicaux.

COMPETENCES EXIGIBLES

Savoir que , si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a.
Sur des exemples numériques où a est un nombre positif, utiliser les égalités :
$(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$

Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2=a$, où a désigne un nombre positif. Sur des exemples numériques, où a et b sont 2 nombres positifs, utiliser les égalités :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

COMMENTAIRES

La touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice, qui a déjà été utilisée en classe de quatrième, fournit une valeur approchée d'une racine carrée.

Le travail mentionné sur les identités remarquables permet d'écrire des égalités comme :
$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$, $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$
Ces résultats, que l'on peut facilement démontrer à partir de la définition de la racine carrée d'un nombre positif, permettent d'écrire des égalités telles que :
$\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

On habituera ainsi les élèves à écrire un nombre sous la forme la mieux adaptée au problème posé

Accompagnements des programmes :

Le théorème de Pythagore, vu en classe de 4 e , est pour le concept de racine carrée une bonne opportunité de mettre en oeuvre le principe d'appuis mutuels entre différentes parties du programme.

Par exemple, déterminer par approximations successives à l'aide d'une calculatrice, des valeurs approchées de la racine carrée d'un nombre ou plus généralement d'une solution d'une équation, constitue une expérimentation où le calcul est conduit sous le contrôle d'un raisonnement bâti sur le concept même de racine carrée ou de solution d'une équation.

En classe de 3 e , une modification de caractère fondamental s'introduit avec l'imbrication totale du calcul numérique et du calcul littéral. C'est, par exemple, du traitement des variables que l'on s'inspire pour les calculs mettant en jeu des racines carrées.

Que l'on explore par exemple, si on n'en a pas encore eu l'occasion, les mêmes calculs sur des racines carrées effectués par un logiciel de calcul formel, selon qu'on lui aura demandé du calcul exact ou du calcul approché (on peut pour cela puiser des idées à partir des exemples mêmes du programme, ainsi : $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$ peut conduire à une variété importante de calculs ayant valeur de tests).