

Première partie

I. Proportionnalité et équations

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{x}{2} = \frac{5}{6}$

2. $\frac{5}{3} = \frac{x}{6}$

3. $\frac{11}{3} = \frac{22}{x}$

4. $\frac{6}{x} = \frac{15}{2}$

5. $\frac{x}{2} = 13$

6. $\frac{3}{x} = 5$

Correction (produit en croix) :

$$x = \frac{5 \times 2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5 \times 6}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

$$x = \frac{3 \times 22}{11} = \frac{66}{11} = 6$$

$$x = \frac{6 \times 2}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$x = 13 \times 2 = 26$$

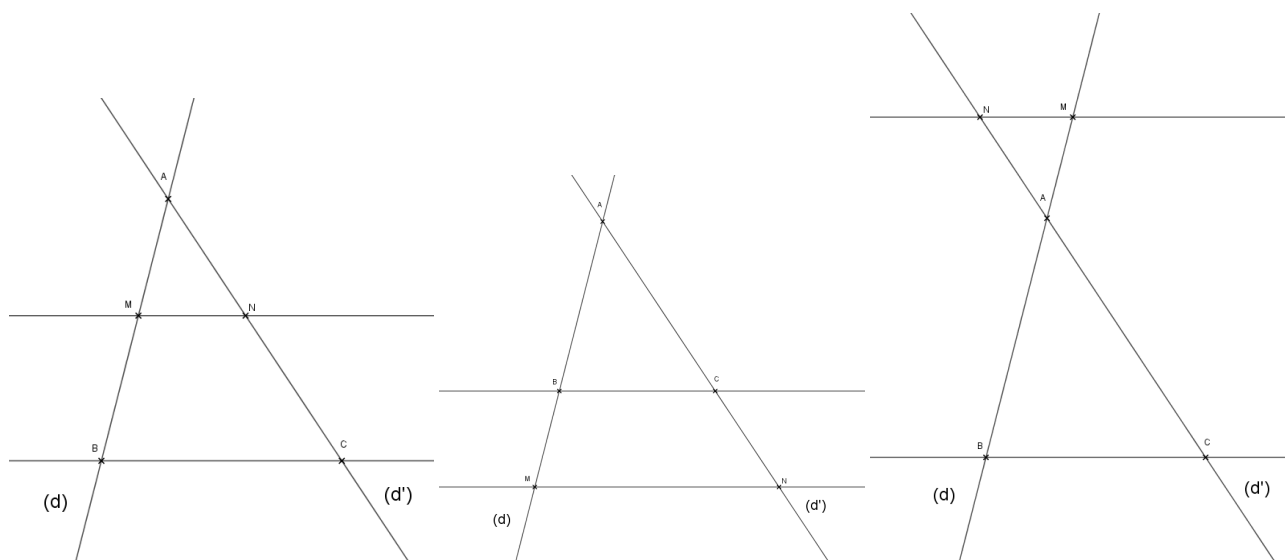
$$x = \frac{3 \times 1}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

II. La propriété directe de Thalès

A. Les figures clés

Définition

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de (d) (distincts de A). Soient C et N deux points de (d') (distincts de A).



Remarque

On peut imaginer que les points A, B et C sont fixes et que la droite (MN) se déplace, M restant sur (d) et N sur (d') . On comprendra pourquoi il semble que (MN) et (BC) sont parallèles dans ces trois figures clés.

III. Le théorème direct

Théorème

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A ; B et M deux points de (d) distincts de A ; C et N deux points de (d') distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

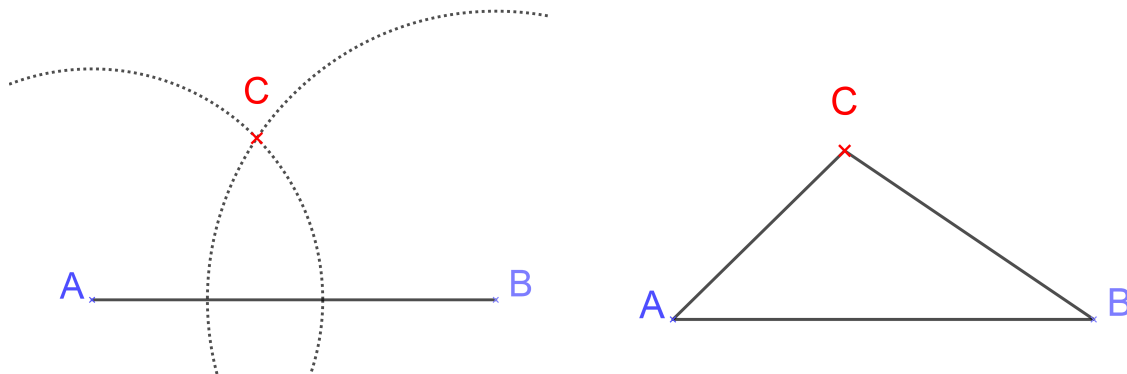
Remarque

Pensez aux trois figures clés !

IV. Applications (Caen 95)

1. Construire un triangle ABC de dimensions $AB = 7$ cm ; $AC = 4$ cm ; $BC = 5$ cm.
2. Soit M le point de $[AB]$ tel que $AM = 1$ cm. La parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en N. Calculer BN et MN (sous forme fractionnaire, puis décimale arrondie à 0,1 près).

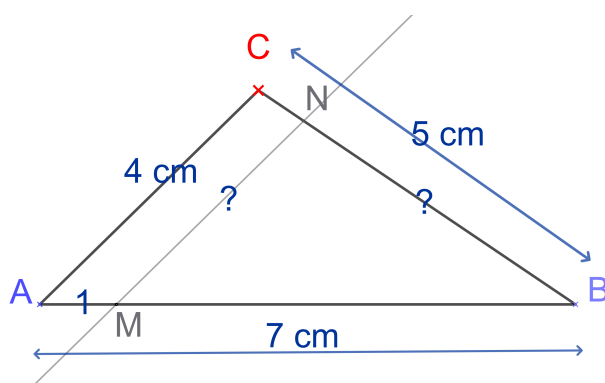
1. On trace d'abord le plus grand côté $[AB]$. Le point C est à l'intersection du cercle de centre A et de rayon 4 cm, et du cercle de centre B et de rayon 5 cm.



Remarque

Il y a deux intersections entre les cercles : on en choisit une !

2.



- Les droites (AM) et (CN) sont sécantes en B.
- Les droites (AC) et (MN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BN}{BC} = \frac{BM}{BA} = \frac{NM}{CA}$$

$$\frac{BN}{5} = \frac{7 - 1}{7} = \frac{NM}{4}$$

$$\frac{BN}{5} = \frac{6}{7} = \frac{NM}{4}$$

D'où :

$$BN = \frac{6 \times 5}{7} = \frac{30}{7} \approx 4,3 \text{ cm}$$

$$NM = \frac{6 \times 4}{7} = \frac{24}{7} \approx 3,4 \text{ cm}$$

V. Agrandissement, réduction

Définition

Dans les deux premières figures clés, on observe un « petit » triangle et un « grand » triangle. Toutes les longueurs du grand triangle s'obtiennent en multipliant celles du petit par un même coefficient k ($k > 1$), appelé **coefficient d'agrandissement**. Inversement, les longueurs du petit triangle s'obtiennent en multipliant celles du grand par un coefficient k ($0 < k < 1$), appelé **coefficient de réduction**.

Deuxième partie

I. Démontrer une égalité

Exemple

Démontrer que $\frac{3+7}{5} = \frac{18}{9}$.

Méthode 1 — partir d'un membre et arriver à l'autre par une suite de calculs :

$$\frac{3+7}{5} = \frac{10}{5} = 2 = \frac{18}{9}$$

Méthode 2 — traiter séparément les deux membres et arriver au même résultat :

$$\begin{aligned} \frac{3+7}{5} &= \frac{10}{5} = 2 \\ \frac{18}{9} &= 2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{3+7}{5} = \frac{18}{9}$$

Remarque

C'est surtout de cette façon qu'on démontrera des égalités cette année !

II. La réciproque de la propriété de Thalès

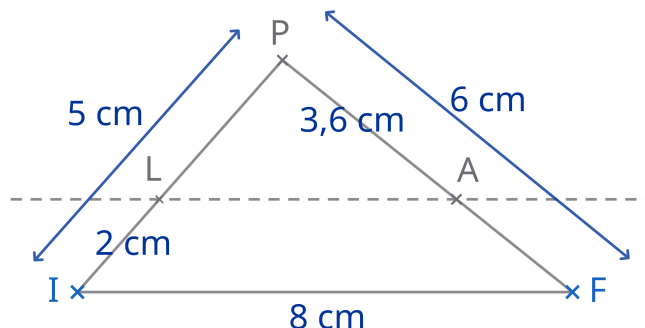
Théorème

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A ; B et M deux points de (d) distincts de A ; C et N deux points de (d') distincts de A. Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

III. Applications (Antilles 96)

Soit un triangle PIF tel que $PI = 5$ cm ; $PF = 6$ cm ; $IF = 8$ cm. L est un point de $[PI]$ tel que $IL = 2$ cm et A un point de $[PF]$ tel que $PA = 3,6$ cm.

1. Faire la figure.
2. Calculer la longueur PL.
3. Démontrer que la droite (LA) est parallèle à la droite (IF) .
4. Calculer la longueur LA.



2. P, L, I sont alignés, donc :

$$PL = PI - IL = 5 - 2 = 3 \text{ cm}$$

3. P, L, I et P, A, F sont alignés dans le même ordre.

$$\frac{PL}{PI} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{PA}{PF} = \frac{3,6}{6} = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Donc :

$$\frac{PL}{PI} = \frac{PA}{PF}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (LA) et (IF) sont parallèles.

4. Les droites (LI) et (AF) sont sécantes en P ; les droites (LA) et (IF) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{PL}{PI} = \frac{PA}{PF} = \frac{LA}{IF}$$

$$\frac{LA}{8} = \frac{3}{5}$$

$$LA = \frac{3 \times 8}{5} = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ cm}$$