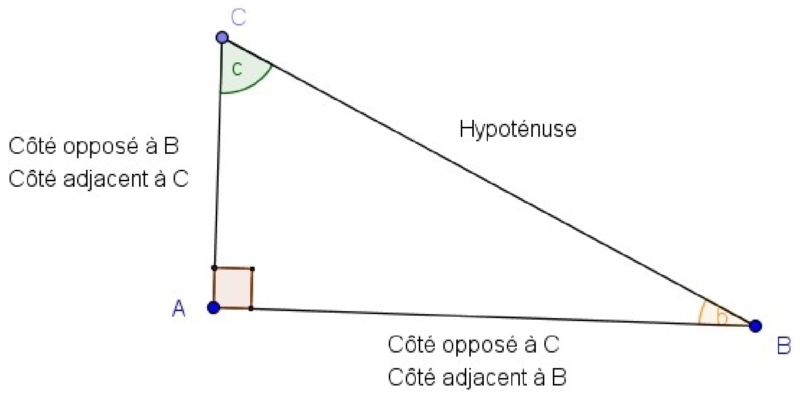
Trigonométrie dans le triangle rectangle

I Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

A Avant propos



Dans le triangle rectangle ABC, $\widehat{A}$ est l'angle droit, le côté opposé à $\widehat{A}$ (en face de $\widehat{A}$) est [BC], c'est l'hypoténuse.

Si on s'intéresse à l'angle $\widehat{B}$:

[AC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{B}$
[AB] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$

Si on s'intéresse à l'angle $\widehat{C}$:

[AC] est _
[AB] est _

B. Formules

Dans ABC un triangle rectangle en A, le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle aigu $\widehat{B}$ sont donnés par les formules suivantes:

$$\cos \widehat{B} = \frac{\textit{côté adjacent à } \widehat{B}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{\textit{côté opposé à } \widehat{B}}{\textit{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\textit{côté opposé à } \widehat{B}}{\textit{côté adjacent à } \widehat{B}} = \frac{AC}{AB}$$

On a de même:

$$\cos \widehat{C} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\sin \widehat{C} = \frac{\text{côté opposé à}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

$$\tan \widehat{C} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

C Mnémotechnie

SOH CAH TOA n'est pas une formule magique mais une moyen mnémotechnique pour retenir les formules ci-dessus:

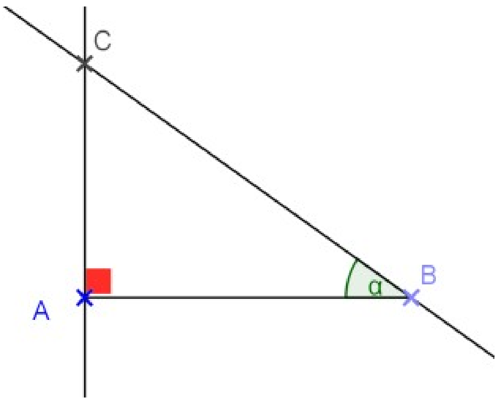
SOH: Sinus Opposé Hypoténuse
CAH: Cosinus Adjacent Hypoténuse
TOA: Tangente Opposé Adjacent

D Exemple

(Japon 96)

ABC est un triangle rectangle en A.
On donne AB = 5 cm et $\widehat{ABC} = 35°$ **.**

- ***Construire la figure en vraie grandeur.***
- ***Déterminer la longueur AC, arrondie au dixième de centimètre.***



Dans le triangle ABC, rectangle en A

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} \; d'où$$

$$AC = AB \times \tan \widehat{B} = 5 \tan 35 \approx 3{,}5\, cm$$

Remarque:

On peut contrôler la vraisemblance du résultat: (3,5 < 5 et 35 < 45)

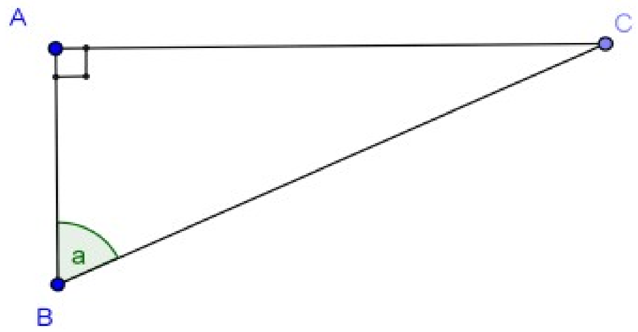
II Relations entre sinus, cosinus et tangente

A Relation fondamentale de la trigonométrie

Si a est un angle aigu d'un triangle rectangle:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

démonstration:



Dans ABC rectangle en A:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

or d'après le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en A:

$AB^2 + AC^2 = BC^2$

donc $\cos^2 a + \sin^2 a = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

B Autre relation

si a est un angle aigu d'un triangle rectangle:

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

démonstration:

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \tan a$$

III Valeurs particulières

En choisissant un triangle rectangle adapté aux différentes situations, vérifier (retrouver) dans le tableau les <u>valeurs exactes</u> suivantes.

Angle $\hat{a}$	30°	45°	60°
Sin $\hat{a}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos $\hat{a}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan $\hat{a}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

OFFICIEL

CONTENUS

Triangle rectangle : relations trigonométriques

COMPETENCES EXIGIBLES

Connaître et utiliser dans le triangle rectangle des relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de 2 côtés du triangle.

Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées :

- du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné.
- de l'angle aigu dont on connaît le sinus, le cosinus ou la tangente.

COMMENTAIRES

La définition du cosinus a été vue en $4^{ème}$. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront introduits comme rapports de longueurs ou à l'aide du quart de cercle trigonométrique. On établira les formules:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$$

On n'utilisera pas d'autre unité que le degré décimal.