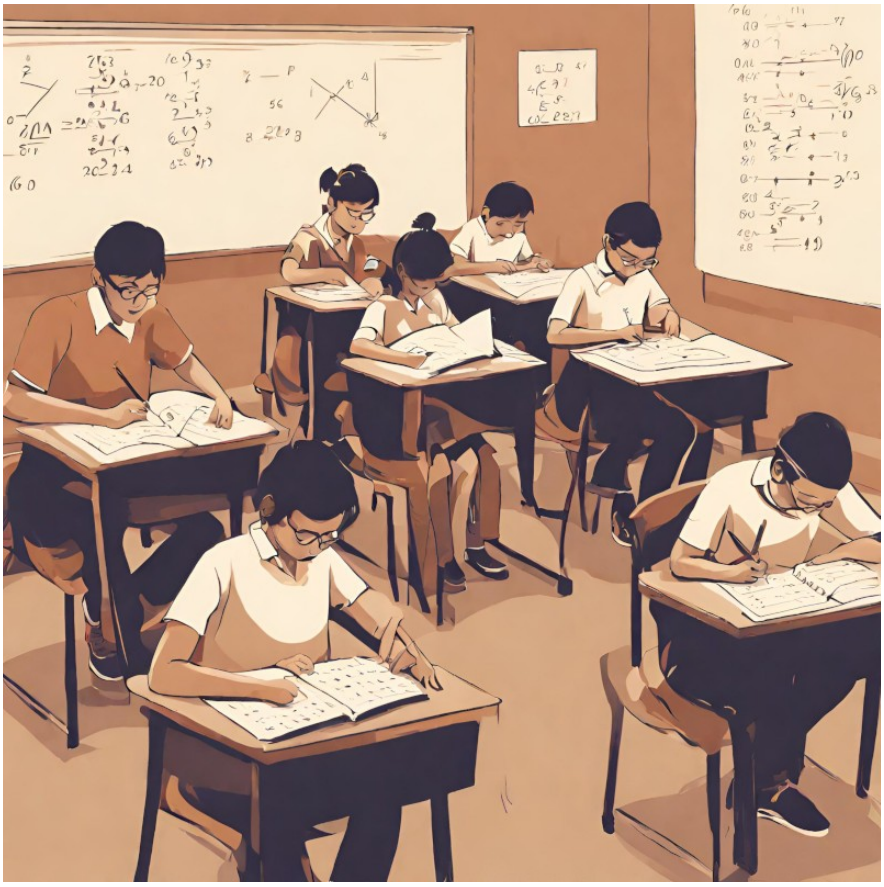
Calcul littéral

I. On communique.

A. De l'expression littérale vers le français :

Traduire les expressions suivante en langage naturel :

1. $x + 1$
2. $\pi + 17$
3. $7 \times n$
4. $2a$
5. $a + b + c$
6. $3b$
7. $t^2 + 3$
8. $(t + 3)^2$
9. $3x + 1$
10. $7x + 8$
11. $7(x + 8)$
12. $7(x + 8) + 2\pi$



Correction :

1. $x+1$ est la somme de x et 1
2. $\pi+17$ est la somme de π et 17
3. $7\times n$ est le produit de 7 par n
4. $2a$ est le double de a
5. $a+b+c$ est la somme de a, b et c
6. $3b$ est le triple de b
7. t^2+3 est la somme de t au carré et 3
8. $(t+3)^2$ est le carré de la somme de t et 3
9. $3x+1$ est la somme du triple de x et 1
10. $7x+8$ est la somme du produit de 7 par x et 8
11. $7(x+8)$ est le produit de 7 par par la somme de x et 8

11. $7(x+8)+2\pi$ est la somme du produit de 7 par la somme de x et 8 , et du double de π

B. Du français vers l'expression littérale

La procédure inverse consiste à écrire l'expression littérale d'après l'expression en langage naturel.

Exemple 1: Écrire le produit de 7 par la somme de π ***et*** $\frac{3}{2}$ ***:***

$$7\left(\pi+\frac{3}{2}\right)$$

Exemple 2: Écrire la somme de 7 et du produit de π ***et*** $\frac{3}{2}$ ***:***

$$7+\pi\times\frac{3}{2}=7+\frac{\pi\times 3}{2}=7+\frac{3\pi}{2}$$

Analyses des erreurs ou imperfections

Quelques-uns ont oublié les parenthèses dans l'exemple 1:

$$7\pi+\frac{3}{2}$$

C'est une erreur ils ont écrit la somme du produit de 7 par π ***et de*** $\frac{3}{2}$

Quelques-autres ont ajouté des parenthèses dans l'exemple 2:

C'est une imperfection, dans l'expression $7 + (\pi \times \frac{3}{2})$ ***, si on se souvient des priorités opératoires, les parenthèses ne servent à rien !***

II. Factoriser une somme

A. Exemples numériques

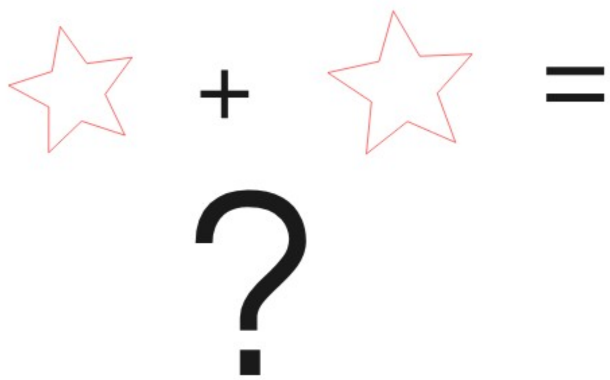
1 .Calculer astucieusement :

$$2,5 \times 4,36 + 7,5 \times 4,36$$

Cette expression est une somme de produit.

en effet en "pensant priorités opératoires" on a:

2,5 x 4,36 + 7,5 x 4,36 =



Regardons attentivement les deux produits.

Le premier est constitué de deux facteurs 2,5 et 4,36

Le deuxième est constitué de deux facteurs 7,5 et 4,36

4,36 est un facteur commun et on a :

$$2,5 \times 4,36 + 7,5 \times 4,36 =$$

$$4,36 \times (2,5 + 7,5)$$

On vient de transformer une somme en produit ! On avait des termes, maintenant on a des facteurs. On a factorisé.

Et on peut terminer le calcul :

$$2,5 \times 4,36 + 7,5 \times 4,36 =$$

$$4,36 \times (2,5 + 7,5) = 4,36 \times 10 = 43,6$$

2. Calculer astucieusement : $3\pi + 5\pi + 2\pi$

A nouveau on a une expression du type somme, cette fois-ci de trois produits, avec le nombre π en facteur commun. On a :

$$3\pi + 5\pi + 2\pi = \pi \times (3 + 5 + 2) = \pi \times 10 = 10\pi \approx 31,4$$

B. Factoriser une expression littérale

L'égalité suivante est toujours vraie pour tous les nombres a,b et k :

ka + kb = k(a+b)

De la gauche vers la droite on dit qu'on factorise k

III. Réduire une somme algébrique

La formule qu'on vient de voir va nous permettre de réduire certaines sommes algébriques :

A. Réduire la somme 3a+ 2b+ 5a

3a+ 2b+ 5a =***On a une somme de trois termes 3a, 2b et 5a. L'ordre n'importe pas...***

3a + 5a + 2b = ***On factorise a***

a(3+5) + 2b = a × 8 +2b =

8a +2b

B. Réduire la somme 3a+ 2b+ 5c

Ici, on ne peut rien faire. On n'a aucun facteur commun aux trois produits.

C. Réduire la somme 7t + 2u + t

Celle-ci embête les élèves comme "il n' y pas de nombre devant le t"... jusqu'à ce qu'on explique que t = 1 × t =1t

7t + 2u + t =

7t + 2u + 1t =

7t + 1t + 2u =

(7 + 1)t +2u = 8t +2u

D. Réduire la somme -2a + 3b + 2a - 2b

Ici ce sont les "-" qui embêtent les élèves.

En fait on a une somme de 4 termes -2a, 3b, 2a et -2b qu'on pourrait écrire :

-2a + 3b + 2a + (-2b)

On peut changer l'ordre des termes et regrouper ceux de son choix :

-2a + 3b + 2a - 2b = a(-2 +2) + b(3 -2) = 0 × a + 1 × b = b

E. Une méthode procédurale

Pour chaque lettre (avec exposant différent) :

On additionne ou on soustrait les coefficients et on écrit le résultat.

Par abus de langage on dit qu'on compte les a, les a^2, les b...

F. Réduire la somme $a^2 - 3a + 4b + 5a^2 - 6b$

Pour ne pas oublier de lettre (avec exposant) on peut prendre les exposants par ordre décroissant et les lettres par ordre alphabétique :

- Combien ai-je de a^2 ? J'en ai 6 (1 + 5)
- Combien ai-je de a ? J'en ai -3
- Combien ai-je de b ? J'en ai -2 (4 - 6)

L'expression réduite est donc $6a^2 - 3a - 2b$

IV. Développer un produit.

A. Un exemple pour commencer:

3(5+3a) + 2a est une somme algébrique qu'il semble impossible de réduire à cause des parenthèses...

B. Et pourtant... Rappelons nous

L'égalité suivante est toujours vraie pour tous les nombres a,b et k :

$$\boxed{ka + kb = k(a+b)}$$

De la gauche vers la droite on dit qu'on factorise k

Et de la droite vers la gauche ?

De la droite vers la gauche on dit qu'on distribue k, ou qu'on développe (étymologie : on enlève l'enveloppe.)

C. Retour à l'exemple :

Commençons par développer (distribuer 3)

$3(5+3a) + 2a =$

$3 \times 5 + 3 \times 3a + 2a =$

$15 + 9a + 2a =$

$11a + 15$

C. "Développer, réduire et ordonner"

La consigne "Développer, réduire et ordonner" est une instruction courante en algèbre, particulièrement lorsqu'on travaille avec des expressions littérales. Elle regroupe trois étapes successives pour simplifier une expression mathématique. Détaillons chacune de ces étapes :

- Développer :

  C'est l'opération contraire de la factorisation. Elle consiste à supprimer les parenthèses en appliquant la distributivité.

  Exemple: Développer l'expression $3(a+2)$ revient à écrire $3a + 6$.

- Réduire :

  Une fois les parenthèses supprimées, on regroupe les termes semblables. Les termes semblables sont ceux qui ont la même partie littérale (les mêmes lettres avec les mêmes exposants).

  Exemple: Dans l'expression $3a + 2b + a - b$, on regroupe les termes en a (3a et a) et les termes en b (2b et -b) pour obtenir $4a + b$.

- Ordonner :

  Cette étape est optionnelle mais recommandée. Elle consiste à écrire les termes de l'expression dans un ordre précis, généralement par ordre décroissant des puissances d'une lettre choisie.

Exemple: On écrira souvent l'expression $3 -2c^2 + c^3$ comme ceci: $c^3 - 2c^2 + 3$

V. Les signes égal.

A. Avant propos

Le signe égal, bien qu'il puisse sembler simple, renferme une richesse de sens en mathématiques.

Il ne signifie pas toujours "faire" comme sur une calculatrice.

En algèbre, il exprime une égalité entre deux expressions, qu'elles soient numériques ou littérales.

C'est un outil puissant pour poser des problèmes (équations), pour vérifier des résultats, pour exprimer des relations (formules).

Parfois, il sert à affecter une valeur à une inconnue, comme dans une affectation informatique.

Il est donc essentiel de comprendre le contexte dans lequel il est utilisé pour ne pas commettre d'erreurs.

B. Égalité

Une égalité est une affirmation qui indique que deux expressions ont la même valeur. On la représente par le signe égal.

- $2 + 3 = 5$ est une égalité vraie
- $4 + 5 = 10$ est une égalité fausse.
- $p + p = 2p$ est une égalité vraie pour tous les nombres p

- $2x+5=11$ est une égalité qui pourrait être vraie pour certaine valeur de x

  Pour $x=10$ cette dernière égalité est fausse : 2×10 + 5 = 20 + 5 = 25 et 25 ≠ 11

C. Formule

$P=2\pi R$ est une formule qui nous rappelle ce qu'il faut faire pour calculer le périmètre d'un cercle…

D. Équation

Une équation est une égalité mathématique qui contient au moins une inconnue.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie.

On a vu tout à l'heure que $2x+5=11$ est une égalité. (fausse pour $x=10$.)

x étant une inconnue, cette égalité est une équation. Équation que nous allons résoudre.

$$\begin{gathered}2x+5=11\\2x+5-5=11-5\\2x=6\\x=3\end{gathered}$$

Cette équation admet une unique solution $x=3$

Remarque : En testant cette valeur tout à l'heure on aurait pu conclure que 3 était une solution, mais nous n'étions pas certain que c'était la seule !

E. Affectation

```
Python 3.11.2 (main, May  3 2023 04:00:05)
Type "help", "copyright", "credits" or "lic
ense" for more information.
>>> x=5
>>> print(x)
5
>>> print(x-1)
4
>>> x=x+2
>>> print(x)
7
>>>
```

En programmation (Python dans l'image ci-dessus) le code x=5 n'est pas une égalité mais une affectation. Dans certain langage pour éviter cette ambiguïté on notera plutôt : x $\leftarrow$ 5

L’affectation sert à attribuer une valeur à une variable. C'est comme si on mettait un étiquette sur une boîte : l'étiquette (la variable) correspond au contenu de la boîte (la valeur).

Ici, on affecte la valeur 5 à la variable x. Après cette instruction, chaque fois qu'on rencontrera x dans le programme, il sera remplacé par 5.

Le code : print(x) demande simplement à Python d'imprimer à l'écran la valeur de la variable x.

Ce qui est plus étonnant c'est que quand on écrit maintenant x=x+2, on affecte à la variable x une nouvelle valeur 5 +2 soit 7.

Vous pouvez-vous amuser avec l'affectation avec le bac à sable Python du site2wouf.fr

Officiel

Au cycle 3, l'élève a fait fonctionner de manière implicite les propriétés des opérations dans le champ des nombres, mais sans les avoir formalisées en tant que propriétés générales.

Il a rencontré des formules littérales dans le cadre des apprentissages liés aux mesures de grandeurs ; la lettre y avait essentiellement valeur d'abréviation ; ainsi, la formule $A = L \times l$, est une abréviation de l'expression « aire du rectangle = longueur fois largeur » utilisée par l'élève pour effectuer directement le produit des nombres donnés pour la longueur et la largeur, sans identification explicite du processus de substitution des lettres par des valeurs numériques.

L'élève a aussi appris à compléter des égalités à trou, notamment à l'occasion du travail sur les notions de différence et de quotient. Il a résolu des problèmes du premier degré sans avoir recours à la résolution d'équations, mais en agissant par tâtonnements, en ayant recours à des étapes intermédiaires avec ou sans l'aide d'outils numériques (tableur, calculatrice).

Au titre de l'entrée dans l'algèbre, l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 vise les objectifs suivants :

- traduire le résultat de la suite des opérations d'un programme de calcul sous la forme d'une expression littérale et établir le lien entre l'aspect « procédural » et l'aspect « structural » de cette expression : ainsi, le résultat du programme de calcul « multiplier un nombre par 2 et ajouter 3 au résultat » se traduit par l'expression $2x + 3$ dont la structure est celle de la somme de 3 et du double de x ;
- décrire une propriété générale de nombres (par exemple « être la somme de deux entiers consécutifs » ou « être un multiple de 3 ») ;
- démontrer qu'une propriété est vraie dans un cadre général (par exemple les règles du calcul fractionnaire) ;
- modéliser et résoudre des problèmes à l'aide d'équations ou d'inéquations du premier degré ;
- Introduire les concepts de variable et de fonction.

Liens avec les domaines du socle

Le langage algébrique permet de formuler des propriétés mathématiques et de résoudre des problèmes. À travers la pratique du calcul littéral, son apprentissage contribue donc de façon essentielle à l'objectif « comprendre, s'exprimer en utilisant les langages mathématiques, scientifiques et informatiques » du domaine 1 du socle.

Les outils algébriques (lettres, fonctions) sont également utilisés pour représenter des systèmes naturels et techniques et fournir des preuves aux problèmes qu'ils engagent. Leur utilisation participe à la mise en œuvre de la démarche scientifique, en complément de l'observation, la manipulation et l'expérimentation. Le calcul littéral contribue donc fortement à l'atteinte des objectifs du domaine 4 du socle.