

I. On communique

Les mots comme *somme*, *produit*, *double*, *tiers*... vous disent quelque chose ? Êtes-vous capables de les comprendre et de les utiliser dans des calculs ?

A. De l'expression littérale vers le français

Traduire les expressions suivantes en langage naturel : $x + 1$; $\pi + 17$; $7 \times n$; $2a$; $a + b + c$; $3b$; $t^2 + 3$; $(t + 3)^2$; $3x + 1$; $7x + 8$; $7(x + 8)$; $7(x + 8) + 2$.

Correction.

- $x + 1$ est la somme de x et 1 ;
- $\pi + 17$ est la somme de π et 17 ;
- $7 \times n$ est le produit de 7 par n ;
- $2a$ est le double de a ;
- $a + b + c$ est la somme de a , b et c ;
- $3b$ est le triple de b ;
- $t^2 + 3$ est la somme du carré de t et 3 ;
- $(t + 3)^2$ est le carré de la somme de t et 3 ;
- $3x + 1$ est la somme du triple de x et 1 ;
- $7x + 8$ est la somme du produit de 7 par x et 8 ;
- $7(x + 8)$ est le produit de 7 par la somme de x et 8 ;
- $7(x + 8) + 2$ est la somme du produit de 7 par la somme de x et 8, et de 2.

B. Du français vers l'expression littérale

La procédure inverse consiste à écrire l'expression littérale d'après le langage naturel.

Exemple 1. Écrire le produit de 7 par la somme de π et $\frac{3}{2}$:

$$7 \left(\pi + \frac{3}{2} \right)$$

Sans les parenthèses, on écrirait la somme du produit de 7 par π et de $\frac{3}{2}$: c'est une **erreur**.

Exemple 2. Écrire la somme de 7 et du produit de π par $\frac{3}{2}$:

$$7 + \pi \times \frac{3}{2}$$

Ajouter des parenthèses autour du produit est une **imperfection** : avec les priorités opératoires, elles ne servent à rien.

Compétence — traduire une expression littérale

Établir un lien clair entre le langage mathématique et son interprétation verbale : comprendre +, ×, les puissances et les parenthèses, et formuler en français des expressions simples à modérées.

II. Factoriser une somme

A. Exemples numériques

1. Calculer astucieusement $2,5 \times 4,36 + 7,5 \times 4,36$. C'est une somme de deux produits ayant 4,36 pour **facteur commun** :

$$2,5 \times 4,36 + 7,5 \times 4,36 = 4,36 \times (2,5 + 7,5) = 4,36 \times 10 = 43,6$$

On a transformé une somme en produit : on a **factorisé**.

2. De même, avec π en facteur commun :

$$3\pi + 5\pi + 2\pi = \pi \times (3 + 5 + 2) = \pi \times 10 = 10\pi \approx 31,4$$

B. Factoriser une expression littérale

Propriété

Pour tous les nombres a , b et k :

$$ka + kb = k(a + b)$$

De la gauche vers la droite, on dit qu'on **factorise** k .

Compétence — reconnaître et utiliser une factorisation simple

Identifier un facteur commun dans une somme de termes et transformer cette somme en un produit, pour simplifier des calculs ou manipuler des expressions.

III. Réduire une somme algébrique

A. Réduire $3a + 2b + 5a$

$$\begin{aligned} 3a + 2b + 5a &= 3a + 5a + 2b = a(3 + 5) + 2b \\ &= 8a + 2b \end{aligned}$$

B. Réduire $3a + 2b + 5c$

On ne peut rien faire : aucun facteur commun aux trois produits.

C. Réduire $7t + 2u + t$

Comme $t = 1 \times t = 1t$:

$$7t + 2u + t = 7t + 1t + 2u = (7 + 1)t + 2u = 8t + 2u$$

D. Réduire $-2a + 3b + 2a - 2b$

$$-2a + 3b + 2a - 2b = a(-2 + 2) + b(3 - 2) = 0 \times a + 1 \times b = b$$

E. Une méthode procédurale

Pour chaque lettre (avec son exposant) : on additionne ou soustrait les coefficients et on écrit le résultat. Par abus de langage, on dit qu'on « compte les a , les a^2 , les b ... ».

F. Réduire $a^2 - 3a + 4b + 5a^2 - 6b$

En prenant les exposants par ordre décroissant et les lettres par ordre alphabétique : $1 + 5 = 6$ termes en a^2 , -3 terme en a , $4 - 6 = -2$ termes en b .

$$a^2 - 3a + 4b + 5a^2 - 6b = 6a^2 - 3a - 2b$$

Compétence — réduire une expression littérale

Reconnaître les termes semblables, les regrouper et effectuer les calculs pour simplifier une expression.

IV. Développer un produit

A. Un exemple pour commencer

$3(5 + 3a) + 2a$ semble impossible à réduire à cause des parenthèses...

B. Rappelons-nous

Propriété

Pour tous les nombres a , b et k : $ka + kb = k(a + b)$. De la droite vers la gauche, on dit qu'on **distribue** k , ou qu'on **développe** (étymologie : on enlève l'enveloppe).

C. Retour à l'exemple

$$3(5 + 3a) + 2a = 3 \times 5 + 3 \times 3a + 2a = 15 + 9a + 2a \\ = 11a + 15$$

D. « Développer, réduire et ordonner »

- **Développer** : opération contraire de la factorisation ; on supprime les parenthèses avec la distributivité. Ex. $3(a + 2) = 3a + 6$.
- **Réduire** : on regroupe les **termes semblables** (même partie littérale). Ex. $3a + 2b + a - b = 4a + b$.
- **Ordonner** (facultatif mais recommandé) : on écrit les termes par puissances décroissantes. Ex. $3 - 2c^2 + c^3 = c^3 - 2c^2 + 3$.

Compétence — développer une expression littérale

Appliquer la distributivité pour transformer un produit en somme, du type $a(b+c)$, afin de préparer une réduction ou de résoudre une équation.

V. Les signes égal

A. Avant-propos

Le signe égal ne signifie pas toujours « faire », comme sur une calculatrice. En algèbre, il exprime une **égalité** entre deux expressions ; il sert à poser des problèmes (équations), à vérifier des résultats, à exprimer des relations (formules), parfois à **affecter** une valeur. Le signe « = » n'a pas toujours le même sens !

B. Égalité

Définition

Une **égalité** affirme que deux expressions ont la même valeur ; on la note avec le signe =.

- $2 + 3 = 5$ est une égalité **vraie** ;
- $4 + 5 = 10$ est une égalité **fausse** ;
- $p + p = 2p$ est vraie pour tous les nombres p ;
- $3 \times x = 12$ pourrait être vraie pour certaines valeurs de x (pour $x = 10$: $3 \times 10 = 30 \neq 12$, donc fausse).

C. Formule

$P = 2\pi R$ est une **formule** : elle rappelle comment calculer le périmètre d'un cercle.

D. Équation

Définition

Une **équation** est une égalité contenant au moins une **inconnue**. La **résoudre**, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie.

Ici, le signe « = » ne sert donc ni à annoncer un résultat, ni à écrire une formule : il pose une **question**. Reprenons l'égalité $3 \times x = 12$ vue plus haut et résolvons-la, en utilisant l'opération inverse (la division) :

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

Cette équation admet une unique solution : $x = 4$.

Remarque

La résolution des équations $a \times x = c$ et $x + b = c$ est étudiée dans la leçon « Initiation aux écritures littérales » (code **LEC5LITT**).

E. Affectation

En programmation (Python), le code $x = 5$ n'est pas une égalité mais une **affectation** : on attribue la valeur 5 à la variable x (comme une étiquette sur une boîte). Certains langages notent d'ailleurs $x \leftarrow 5$. Ainsi $x = x + 2$ donne à x la nouvelle valeur $5 + 2 = 7$.

```
Python 3.11.2 (main, May 3 2023 04:00:05)
Type "help", "copyright", "credits" or "license" for more information.
>>> x=5
>>> print(x)
5
>>> print(x-1)
4
>>> x=x+2
>>> print(x)
7
>>>
```

F. Tableur

Dans un tableur (Excel, LibreOffice Calc), le signe $=$ **commence une formule**. Par exemple, $=A1+B1$ additionne les valeurs des cellules A1 et B1. Ici, $=$ n'exprime pas une égalité mathématique mais lance un calcul.

		√	=A1+B1	
1	A	B	C	
1	2	3	5	
2				
3				
4				
5				

Compétence — comprendre les différents usages du signe égal

Distinguer une égalité de calcul, une formule, une équation et une affectation, et utiliser le signe $=$ à bon escient selon le contexte.