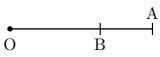
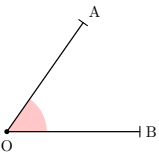
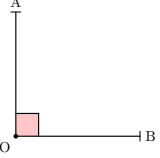
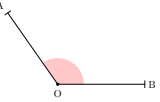


I. Angles et activité

A. Les différents types d'angles

$\widehat{AOB}$	Nul	Aigu	Droit	Obtus	Plat
Figure					
Mesure	0°	entre 0° et 90°	90°	entre 90° et 180°	180°
Remarque	A, O, B alignés	plus petit qu'un droit	$(OA) \perp (OB)$	plus grand qu'un droit	A, O, B alignés, O entre A et B

B. Activité

Trace, dans ton cahier d'exercices, un triangle tel que deux de ses angles soient obtus.

Bilan

C'est impossible ! Pourquoi ? (À débattre.)

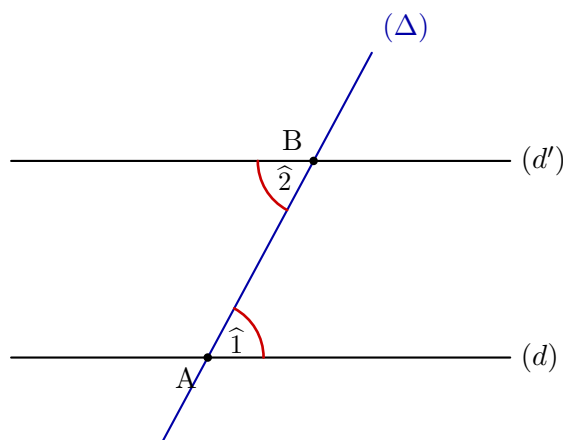
C. Angles et parallélisme

Quand deux droites (d) et (d') sont coupées par une troisième droite (Δ) , appelée **sécante**, il se forme des angles qui vont nous renseigner sur le **parallélisme** de (d) et (d') .

1. Angles alternes-internes

Définition

Deux angles **alternes-internes** sont situés **entre** les deux droites (« internes ») et **de part et d'autre** de la sécante (« alternes »).

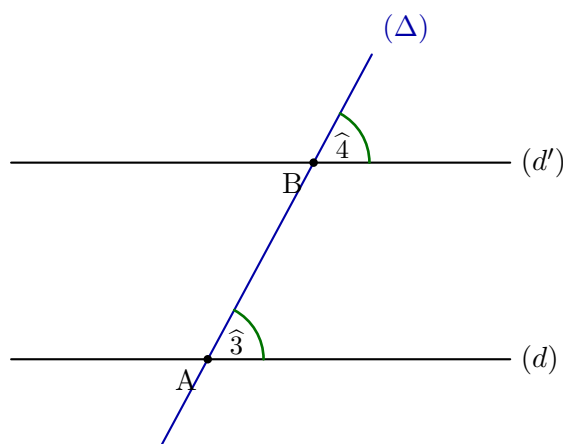


Sur la figure, $\hat{1}$ et $\hat{2}$ sont alternes-internes.

2. Angles correspondants

Définition

Deux angles **correspondants** sont situés du **même côté** de la sécante, l'un entre les deux droites, l'autre à l'extérieur : ils occupent la même position en A et en B.



Sur la figure, $\hat{3}$ et $\hat{4}$ sont correspondants.

3. Propriétés

Propriété

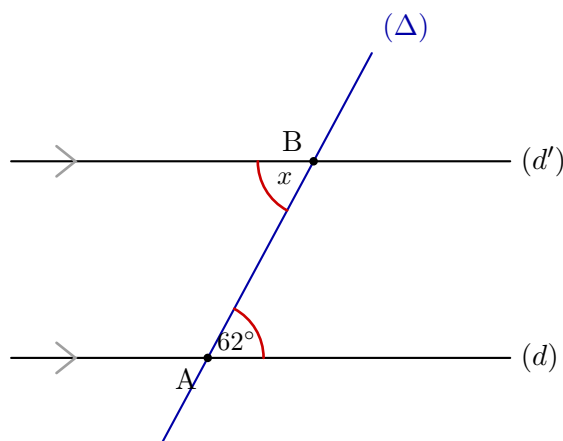
1. Si deux droites sont **parallèles**, alors les angles alternes-internes formés avec une sécante ont **la même mesure**. Il en va de même pour les angles correspondants.
2. **Réciproque** : si deux angles alternes-internes (ou deux angles correspondants) ont la même mesure, alors les deux droites sont **parallèles**.

Remarque

La propriété 1 sert à **calculer** un angle quand on sait que les droites sont parallèles. La réciproque sert à **démontrer** que deux droites sont parallèles quand on connaît les angles.

4. Exercice classique

Sur la figure, (d) et (d') sont parallèles. Calculer x .



Exemple

Les droites (d) et (d') sont parallèles, et les angles de 62° et x sont **alternes-internes** (entre les deux droites, de part et d'autre de la sécante). D'après la propriété 1, ils ont donc la même mesure :

$$x = 62^\circ$$

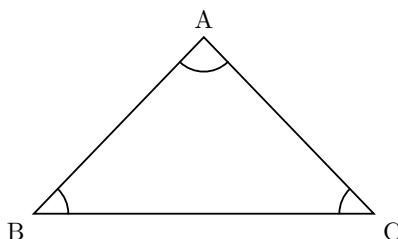
II. La somme des angles d'un triangle

A. Propriété

Propriété

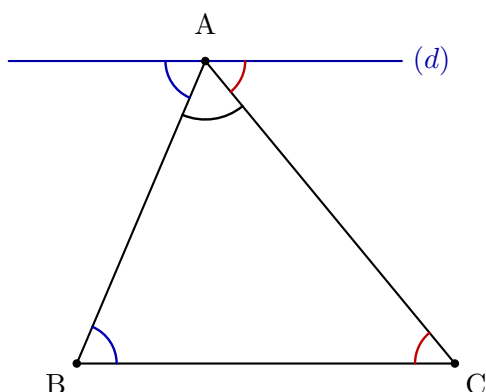
La somme des angles d'un triangle est égale à 180° :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



B. Démonstration

Traçons la droite (d) , **parallèle** à (BC) et passant par A.



(d) est la parallèle à (BC) passant par A

La droite (AB) est une sécante aux deux droites parallèles (d) et (BC) : l'angle $\hat{B}$ du triangle et l'angle qu'il reporte en A (en bleu) sont **alternes-internes**, donc ils ont la même mesure.

De la même façon, (AC) est une sécante aux deux parallèles : l'angle $\hat{C}$ et l'angle qu'il reporte en A (en rouge) sont alternes-internes, donc ils ont la même mesure.

Or, en A, ces trois angles (bleu, noir, rouge) forment un **angle plat** : leur somme vaut 180° . Comme le bleu vaut $\hat{B}$ et le rouge $\hat{C}$:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Remarque

C'est la propriété des angles alternes-internes (partie I.C) qui permet de « remonter » les deux angles de base en A, là où ils se recollent en un angle plat.

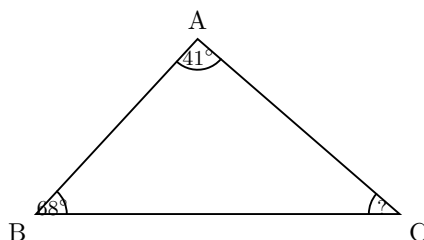
C. Conséquence

L'activité précédente était donc vouée à l'échec : un triangle avec deux angles obtus n'existe pas, car la somme de leurs mesures dépasserait déjà 180° .

III. Exemples de calcul d'angles dans quelques triangles

A. Dans un triangle quelconque

Si on connaît deux angles, on en déduit le troisième.



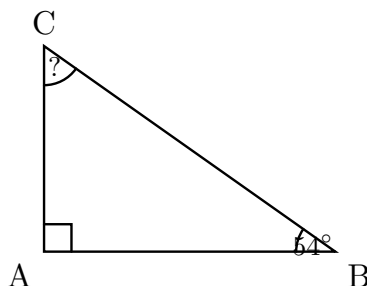
(Les mesures d'angles ne sont pas respectées sur le schéma.)

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ 41^\circ + 68^\circ + \widehat{C} &= 180^\circ \\ 109^\circ + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{C} &= 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ\end{aligned}$$

B. Dans un triangle rectangle

1. Exercice classique

ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 54^\circ$. Après un schéma, calculer $\widehat{BCA}$.



2. Correction

$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= 180^\circ \\ 90^\circ + 54^\circ + \widehat{C} &= 180^\circ \\ 144^\circ + \widehat{C} &= 180^\circ \\ \widehat{C} &= 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ\end{aligned}$$

3. Remarque

Définition

Deux angles sont **complémentaires** lorsque leur somme est 90° .

Propriété

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

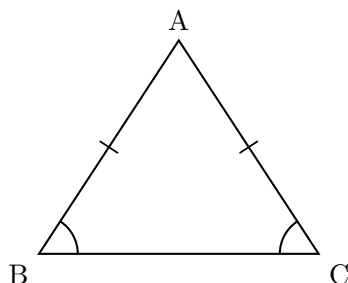
Méthode alternative :

$$\begin{aligned}\widehat{B} + \widehat{C} &= 90^\circ \\ 54^\circ + \widehat{C} &= 90^\circ \\ \widehat{C} &= 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ\end{aligned}$$

C. Dans un triangle isocèle

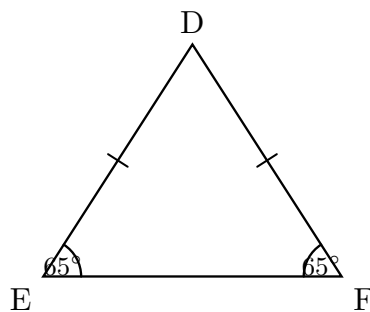
1. Un peu de vocabulaire

Un **triangle isocèle** a deux côtés égaux ; leur point d'intersection est le **sommet principal** (ici A). Les deux autres angles sont les **angles de base**, et ils sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.



2. Quand on connaît l'un des angles de base

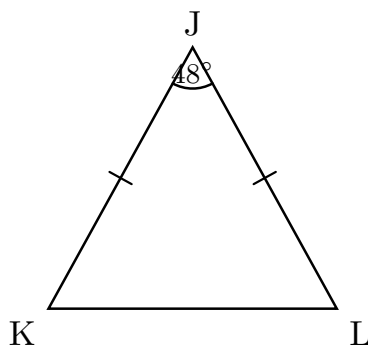
Dans le triangle DEF isocèle en D, les angles de base sont égaux : $\widehat{DEF} = \widehat{DFE} = 65^\circ$.



$$\begin{aligned}\widehat{DEF} + \widehat{DFE} + \widehat{EDF} &= 180^\circ \\ 65^\circ + 65^\circ + \widehat{EDF} &= 180^\circ \\ 130^\circ + \widehat{EDF} &= 180^\circ \\ \widehat{EDF} &= 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ\end{aligned}$$

3. Quand on connaît l'angle du sommet principal

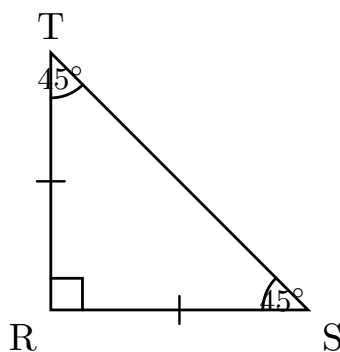
Dans le triangle JKL isocèle en J, les angles de base sont égaux ($\widehat{JLK} = \widehat{LJK}$) et $\widehat{KJL} = 48^\circ$.



$$\begin{aligned}\widehat{KJL} + 2 \times \widehat{JLK} &= 180^\circ \\ 48^\circ + 2 \times \widehat{JLK} &= 180^\circ \\ 2 \times \widehat{JLK} &= 132^\circ \\ \widehat{JLK} &= \frac{132^\circ}{2} = 66^\circ\end{aligned}$$

D. Le triangle rectangle isocèle

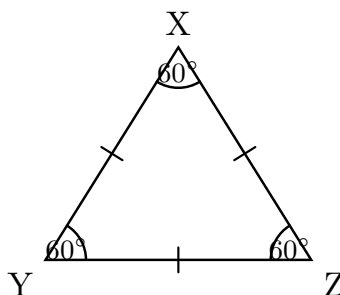
Dans le triangle RST rectangle et isocèle en R, les angles de base sont égaux et complémentaires.



$$\begin{aligned}\widehat{RST} + \widehat{RTS} &= 90^\circ \\ \widehat{RST} = \widehat{RTS} &= \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ\end{aligned}$$

E. Le triangle équilatéral

Les trois angles du triangle équilatéral XYZ sont égaux et leur somme vaut 180° .



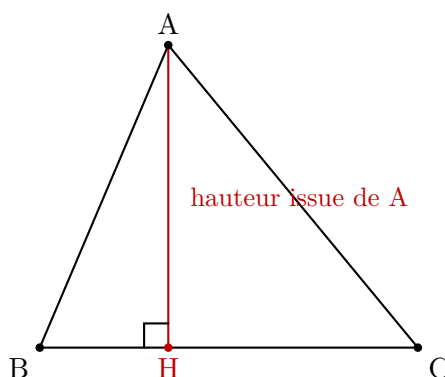
$$\widehat{ZXY} = \widehat{XYZ} = \widehat{YZX} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

IV. Droites remarquables du triangle

A. Les hauteurs

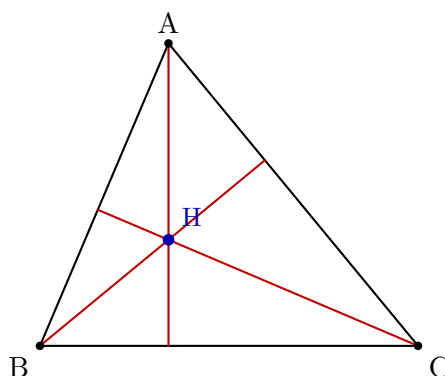
Définition

La **hauteur issue de A** est la droite qui passe par A et qui est **perpendiculaire** au côté opposé $[BC]$. Elle coupe (BC) en un point H, appelé le **pied** de la hauteur.



Propriété

Les **trois hauteurs** d'un triangle sont **concurrentes** : elles se coupent toutes les trois en un même point.



les trois hauteurs se coupent en un même point

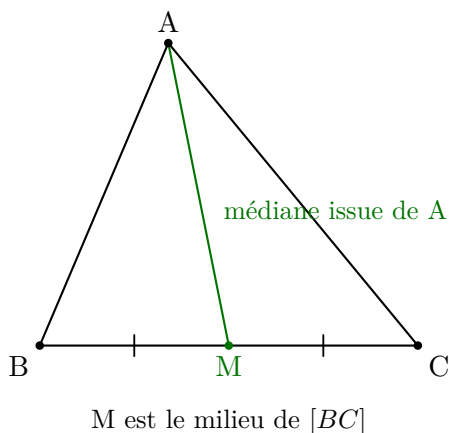
Remarque

Quand un angle du triangle est obtus, le pied de la hauteur sort du côté : il faut alors **prolonger** ce côté pour aller y placer l'angle droit.

B. Les médianes

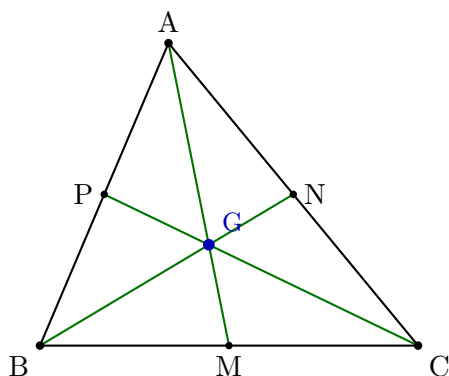
Définition

La **médiane issue de A** est la droite qui passe par A et par le **milieu** M du côté opposé $[BC]$.



Propriété

Les **trois médianes** d'un triangle sont **concourantes**.

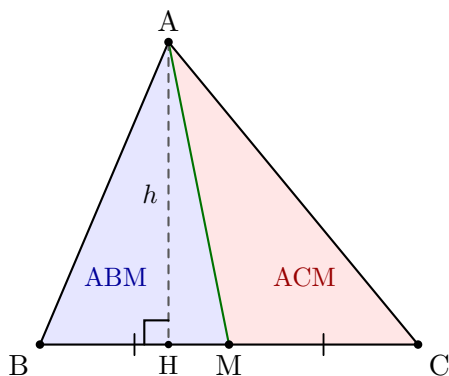


les trois médianes se coupent en un même point

C. Une médiane partage le triangle en deux aires égales

Propriété

Une médiane partage le triangle en **deux triangles de même aire**.



même base : $BM = MC$ · même hauteur : h

1. Démonstration

M est le milieu de $[BC]$: la médiane $[AM]$ découpe le triangle ABC en deux triangles, ABM et ACM. Comparons leurs aires.

- Ils ont des **bases de même longueur** : $BM = MC$, puisque M est le milieu de $[BC]$.
- Ils ont la **même hauteur** : c'est la distance h du point A à la droite (BC) , qui est la même pour les deux triangles (leurs bases sont toutes les deux portées par la droite (BC)).

En utilisant la formule de l'aire d'un triangle :

$$\text{aire}(ABM) = \frac{BM \times h}{2} \quad \text{et} \quad \text{aire}(ACM) = \frac{MC \times h}{2}$$

Or $BM = MC$: les deux calculs donnent le même résultat. Les triangles ABM et ACM ont donc la même aire.