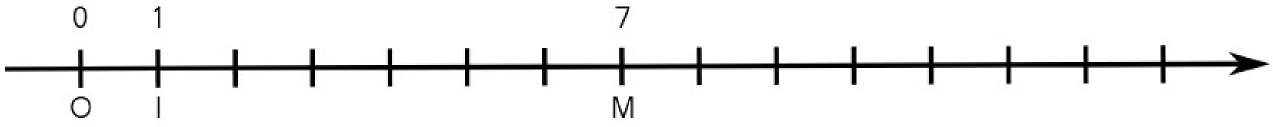
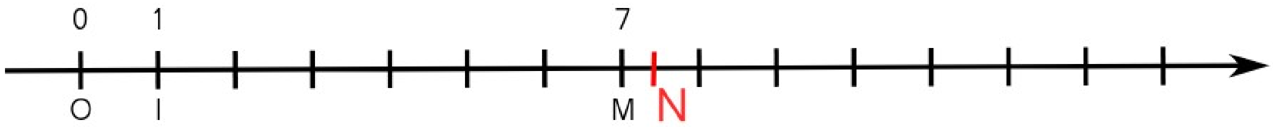
Nombres décimaux et opérations

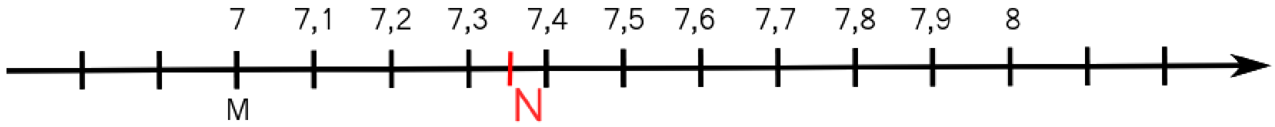
I. Les entiers naturels ne suffisent pas !



Sur une demi-droite graduée. Le point M a pour abscisse 7. On a dit que chaque point d'une telle droite pouvait être repéré par son abscisse. Mais que ce passe-t-il pour le point N suivant ?



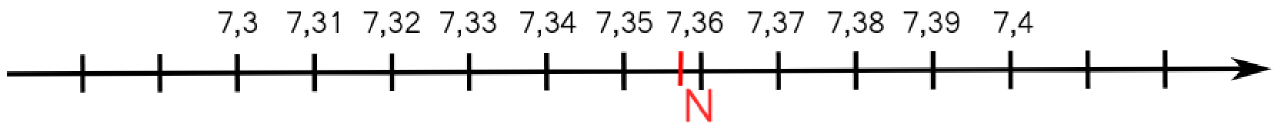
Ce point a une abscisse non entière, comprise entre 7 et 8. regardons ça de plus près...Zoomons !



Nous avons placé les graduations entre 7 et 8. De 7,1 (lire sept virgule un) à 7,9 (lire sept virgule 9.)

Manque de chance l'abscisse de N ne correspond toujours pas à une graduation...

Zoomons à nouveau en graduant, avec le même principe entre 7,3 et 7,4 :



L'abscisse de N est comprise entre 7,35 et 7,36 et on pourrait encore affiner en zoomant à nouveau...

Un peu d'histoire

A l'époque, environ 3000 ans avnt JC, on utilisait les nombres entiers naturels pour compter des objets..

On raconte qu'un jour, un homme a voulu mesurer une ficelle avec un bâton. Mais il y avait un problème : la ficelle mesurait plus de 11 bâtons mais moins de 12 !

Alors il a décidé de partager son bâton en 10 parties égales : un petit « bout » faisait un dixième de bâton, le bâton tout entier faisait dix dixièmes.Et il a dit : « Ma ficelle mesure 11 bâtons et 4 dixièmes de bâton. » Il était content.

Mais c'est seulement au début du XVIIème siècle que l'écossais John Napier (1550 ; 1617) utilise la virgule dans l'écriture des nombres décimaux pour séparer les unités des dixièmes.

Pour plus d'information : Histoire de l'Écriture décimale

Une remarque pour clore le paragraphe.

Nous verrons par la suite que ces nombres décimaux ne suffisent pas non plus pour donner une abscisse à tous les points de cette demi-droite!

II. Nom des chiffres dans l'écriture décimale.

A. Vocabulaire et remarque

Dans le nombre décimal 12 345,6789 la virgule, pacée derrière le chiffre des unités sépare la partie entière (12 345) de la partie décimale (6789.)

Un nombre entier est un nombre décimal particulier, sa partie décimale est nulle (Et on n'écrit pas la virgule)

B. A connaître :

Dans la partie décimale (après la virgule) les chiffres sont appelés dans l'ordre :

- Le chiffre des dixièmes (on a partagé l'unité en 10)
- Le chiffre des centièmes (on a partagé l'unité en 100)
- Le chiffre des millièmes (on a partagé l'unité en 1000)
- Le chiffre des dix-millièmes (on a partagé l'unité en 10 000)
- etc..

C. Des zéros inutiles

Même si les écrire n'est pas une erreur, les zéros à gauche de la partie entière ou à droite de la partie décimale sont inutiles.

07,10 € écrit sur une étiquette dans votre supermarché favori pourrait être écrit 7,1€... Mais certains risqueraient de lire 7€ et 1 centime (un centième d'euro) plutôt que 7€ et un dixième d'euro !

III. Comparaison des décimaux.

A. Méthode

- De deux décimaux le plus grand est celui qui a la plus grande partie entière ou en cas d'égalité :
- le plus grand chiffre des dixièmes, ou en cas d'égalité :

- le plus grand chiffre des centièmes, ou en cas d'égalité :
- le plus grand chiffre des millièmes, ou en cas d'égalité :
- le plus grand chiffre des dix-millièmes, ou en cas d'égalité :
- etc..

B. Exemple

Comparer 9,3 et 9,25

Les parties entières sont égales, on compare le chiffre des dixième : 3 > 2. On peut conclure :

9,3 > 9,25

C. Rangement.

de nombreux exercices classiques demandent de ranger des décimaux par ordre croissant (du plus petit au plus grand) ou par ordre décroissant (du plu grand au plus petit.)

D. Encadrement à l'unité d'un nombre décimal.

1. Définition préliminaire.

Encadrer un décimal à l'unité veut dire le "coincer" entre deux entiers consécutifs (qui se suivent.)

2. Exemples :

Voici quelques encadrements à l'unité :

- **1 < 1,936 < 2**
- **17 < 17,1 < 18**
- **3 < 3,1 < 4**
- **2 024 < 2 024,09 < 2025**
- **5 < 5,5 < 6**

3.Autres définitions

a. Valeurs approchées à l'unité par défaut

Dans les inégalités ci-dessus le nombre de gauche est appelé valeur approchée à l'unité par défaut.

1 est la valeur approchée à l'unité par défaut de 1,936

b. Valeurs approchées à l'unité par excès

Dans les inégalités ci-dessus le nombre de droite est appelé valeur approchée à l'unité par excès.

18 est la valeur approchée à l'unté par excès de 17,1

c. Arrondi à l'unité

Ainsi un nombre décimal non entier posséde deux valeurs approchées.

On appelle arrondi à l'unité d'un nombre décimal sa valeur approchée la plus proche.

Deux remarques :

1. L'arrondi à l'unité de 1,936 est 2, cela ne pose aucun souci.

Mais quel est l'arrondi à l'unité de 5,5?

5,5 est aussi proche de 5 que de 6, mais par convention, on choisira le plus grand des deux (6) comme arrondi à l'unité.

Pour retenir ceci on peut imaginer que pour arrondir un nombre décimal à l'unité on regarde le chiffre des dixièmes et

- Pour 0-1-2-3-4 on arrondit "en dessous" à la valeur approchée par défaut.
- Pour 5-6-7-8-9 on arrondit "au-dessus" à la valeur approchée par excès.

E. Autres encadrements

On a parlé dans le paragraphe précédent d'encadrements à l'unité, mais on peut encadrer un nombre décimal au dixième (par exemple) avec la même logique et donner son arrondi au dixième.

- $3,1 < 3,14 < 3,2$
- $15,2 < 15,25 < 15,3$

3,1 est la valeur approchée au dixième par défaut de 3,14

15,3 est la valeur approchée au dixième par excès de 15,25

L'arrondi au dixième de 3,14 est 3,1. On note 3,14 ≈ 3,1

L'arrondi au dixième de 15,25 est 15,3. On note 15,25 ≈ 15,3

IV. Additions et soustractions des décimaux

A. Aligner les nombres

1. Règle d'or

Les virgules doivent être strictement alignées, les unes en dessous des autres.

2. Exemple : 3,14 + 87,2 :

$$\begin{array}{cccccc} & & 3 & , & 1 & 4 \\ + & 8 & 7 & , & 2 & \end{array}$$

B. On complète avec des zéros (inutiles)

1. Remarque

On le fait sur sa feuille, ou dans la tête...

2. Exemple : 3,14 + 87,2 :

		3	,	1	4
+	8	7	,	2	0

C. On effectue l'addition (ou la soustraction) comme avec les entiers

		3	,	1	4
+	8	7	,	2	0
	9	0		3	4

D. On reporte la virgule

La virgule du résultat se place directement sous les virgules des nombres à additionner ou à soustraire.

		3	,	1	4
+	8	7	,	2	0
	9	0	,	3	4

E. On enlève éventuellement les zéros inutiles

Dans notre exemple ce n'est pas le cas.

F. On vérifie que notre résultat est cohérent :

Par exemple avec les arrondis à l'unité on devrait avoir un résultat proche 3 + 87 = 90. C'est le cas !

V. Multiplication des décimaux

A. Ignorer les virgules

1. ,dans un premier temps

Dans un premier temps : On effectue la multiplication comme si les nombres étaient des entiers, sans se soucier des virgules.

techniquement on aligne les nombres sur leur dernier chiffre...

2. Exemple 2,18 × 3,5

$$\begin{array}{lr} & 2,18 \\ \times & 5,5 \\ \hline & 1090 \\ & 1090 \\ \hline & 11990 \end{array}$$

B. On compte le nombre total de chiffres après la virgule

On compte le nombre total de chiffres qui se trouvent après la virgule dans les deux nombres que l'on multiplie.

Ici, il y en a 3

C. On place la virgule dans le résultat

En partant de la droite du résultat obtenu à l'étape 1, on compte le nombre de chiffres trouvé à l'étape 2, et on place la virgule.

$$\begin{array}{lr} & 2,18 \\ \times & 5,5 \\ \hline & 1090 \\ & 1090 \\ \hline & 11,990 \end{array}$$

D. On enlève éventuellement les zéros inutiles

$$\begin{array}{lr} & 2,18 \\ \times & 5,5 \\ \hline & 1090 \\ & 1090 \\ \hline & 11,99\cancel{0} \end{array}$$

E. On vérifie que notre résultat est cohérent :

Par exemple avec les arrondis à l'unité on devrait avoir un résultat proche de $2 \times 6 = 12$. C'est le cas !

Officiel

Pour que les élèves comprennent pleinement les données numériques exprimées avec des fractions ou sous forme décimale, et puissent mobiliser ces nombres dans la résolution de problèmes, leur première approche de ces notions est essentielle. Elle doit d'abord s'appuyer sur des activités dans lesquelles le nombre entier montre ses limites ; les activités de calcul, décrochées ou en situation, viennent ensuite appuyer cette construction qui se fait sur toute la durée du cycle 3.