Le jeu des allumettes

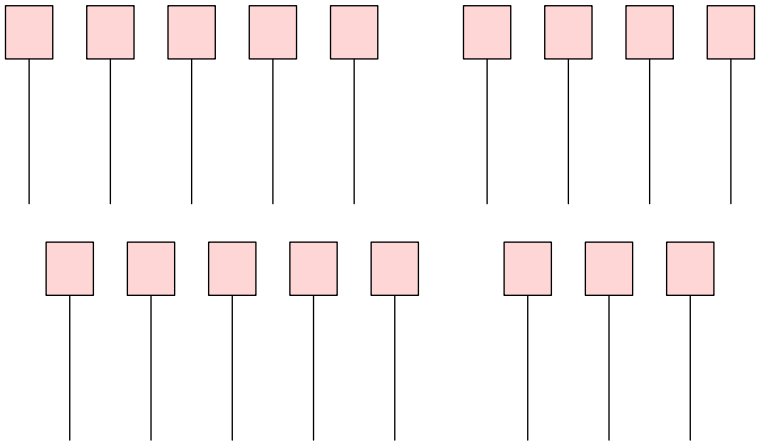
Problème — Fiche n°0

ALLU0000

Un tas d'allumettes, deux joueurs, une règle tenant en une phrase. Pourtant l'un des deux peut gagner à coup sûr, quoi que fasse l'autre — et c'est vous qui commencez. Encore faut-il savoir si la position de départ vous est favorable, et pourquoi.

Le jeu des allumettes

Vous jouez contre **Jade**. Devant vous, un tas de **17 allumettes**.



Chacun son tour, on retire **1, 2 ou 3** allumettes — impossible de passer son tour. **Celui qui prend la dernière allumette gagne.**

C'est vous qui commencez.

Pouvez-vous gagner à coup sûr, quoi que joue Jade ? **Expliquez.**

Un conseil pour démarrer : plutôt que d'essayer des parties au hasard, demandez-vous à partir de quelles situations le joueur dont c'est le tour est perdu d'avance. Commencez par les tout petits tas.

Correction

Le jeu des allumettes — Correction

Le bon point de vue. Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** — le nombre d'allumettes restantes — du point de vue du joueur **dont c'est le tour** :

- position **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- position **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **en partant de la fin**. Devant **0 allumette**, c'est que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a gagné. **0 est donc une position perdante.**

On remonte ensuite une case à la fois :

Allumettes restantes	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Celui qui doit jouer	**perd**	gagne	gagne	gagne	**perd**	gagne	gagne	gagne	**perd**	gagne	gagne

Les positions perdantes sont : 0, 4, 8, 12, 16.

La règle. Ce sont exactement les **multiples de 4**. Et ce n'est pas un hasard : depuis un multiple de 4, tout coup retire entre 1 et 3 allumettes, donc on tombe forcément sur un nombre qui **n'est pas** multiple de 4. Inversement, depuis un nombre qui n'est pas multiple de 4, on peut toujours retirer juste ce qu'il faut pour retomber sur le multiple juste en dessous.

Conclusion. Ici le tas compte 17 allumettes, et $17 = 4 \times 4 + 1$: ce n'est pas un multiple de 4.

Oui, vous gagnez à coup sûr.

Votre premier coup : retirer **1** allumette, ce qui laisse **16** — un multiple de 4, donc une position perdante pour Jade.

La stratégie, en une phrase. Rendez toujours à Jade un **multiple de 4**. C'est facile à tenir : s'il retire **a** allumettes, vous en retirez **4 − a**. À vous deux vous en enlevez 4 par tour, et le multiple suivant arrive tout seul. En descendant ainsi de 4 en 4, on atteint 0 — et c'est vous qui aurez pris la dernière.

À retenir, bien au-delà des allumettes. Analyser un jeu à deux, ce n'est pas imaginer des coups : c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.