



# Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°105



ALLU0105

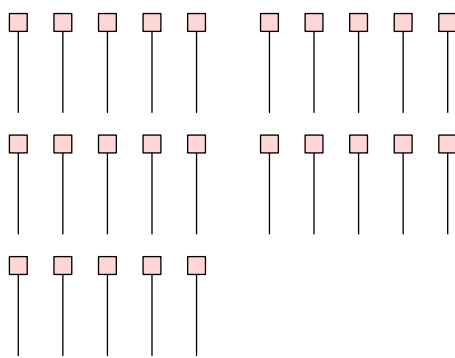
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

## Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **1, 2, 3 ou 4** allumette(s) — pas le choix de passer.

**Celui qui prend la dernière allumette** gagne.

Voici le tas de départ, **25 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **5 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **25 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



# Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°105



ALLU0105

## Correction

### Le jeu des allumettes — Correction

**Le bon point de vue.** Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a gagné, donc **0 est une position perdante**.

1. Construisons le tableau jusqu'à 5 :

| Allumettes restantes     | 0           | 1     | 2     | 3     | 4     | 5           |
|--------------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| Le joueur qui doit jouer | <b>perd</b> | gagne | gagne | gagne | gagne | <b>perd</b> |

**Avec 5 allumettes, la position de départ est perdante : Alice, qui commence, ne peut pas gagner si Bruno joue bien.**

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 25. Les positions perdantes rencontrées sont :

**5, 10, 15, 20, 25, 30, ...**

**25 est une position perdante. Alice, qui commence, est donc condamnée : quoi qu'elle joue, Bruno peut toujours lui rendre une position perdante.**

**C'est Bruno qui gagne, à condition de jouer correctement.**

3.

**Les positions perdantes sont exactement les multiples de 5 : 0, 5, 10, 15, ...**

**Pourquoi ?** Depuis un multiple de 5, tout coup retire entre 1 et 4 allumettes : on tombe donc forcément sur un nombre qui **n'est pas** un multiple de 5. Inversement, depuis un nombre qui n'est pas multiple de 5, on peut toujours retirer juste ce qu'il faut (entre 1 et 4) pour retomber sur le multiple de 5 juste en dessous.

**La stratégie.** Celui qui laisse toujours à l'autre un multiple de 5 gagne. Et il y parvient toujours : si le tas vaut  $5q + r$  avec  $r$  entre 1 et 4, il retire  $r$ . C'est l'astuce des « allumettes complémentaires » — si l'adversaire prend  $a$ , on prend  $5 - a$ .

**Ici  $25 = 5 \times 5$  : c'est un multiple, position perdante.**

**À retenir, bien au-delà des allumettes.** Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.