



Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°232



ALLU0232

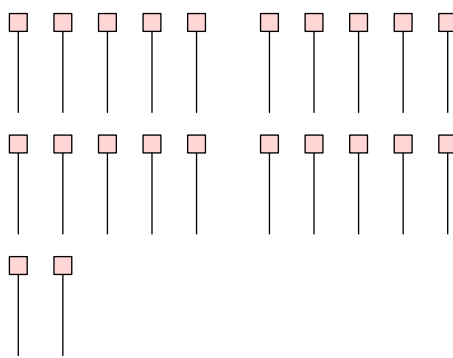
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **1, 2 ou 3** allumette(s) — pas le choix de passer.

Celui qui prend la dernière allumette perd.

Voici le tas de départ, **22 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **8 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **22 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



Correction

Le jeu des allumettes — Correction

Le bon point de vue. Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a **perdu**, donc **0 est une position gagnante** pour celui qui la reçoit.

1. Construisons le tableau jusqu'à 8 :

Allumettes restantes	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Le joueur qui doit jouer	gagne	perd	gagne	gagne	gagne	perd	gagne	gagne	gagne

Avec 8 allumettes, la position de départ est gagnante : Alice a une façon de l'emporter à coup sûr.

Son coup : retirer **3** allumette(s), ce qui laisse 5 — une position perdante pour Bruno.

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 22. Les positions perdantes rencontrées sont :

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ...

22 est une position gagnante : Alice gagne.

Son premier coup : retirer **1** allumette(s), ce qui laisse **21** — position perdante pour Bruno.

Ensuite, sa stratégie est mécanique : à chaque tour, elle ramène le tas sur la position perdante suivante. Bruno ne peut jamais y échapper.

3.

Les positions perdantes sont les nombres de la forme $4q + 1$: 1, 5, 9, 13, ...

Pourquoi ce décalage ? Le but a changé : prendre la dernière allumette fait **perdre**. Tout se passe donc comme si l'on jouait au jeu ordinaire sur un tas amputé de la dernière allumette — celle qu'il faut **laisser** à l'adversaire. D'où la règle décalée de 1.

La stratégie. Laisser toujours à l'adversaire un nombre d'allumettes de la forme $4q + 1$; il finira nécessairement par devoir prendre la dernière.

Ici $22 - 1 = 21$, qui n'est pas multiple de 4 : position gagnante.

À retenir, bien au-delà des allumettes. Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.