



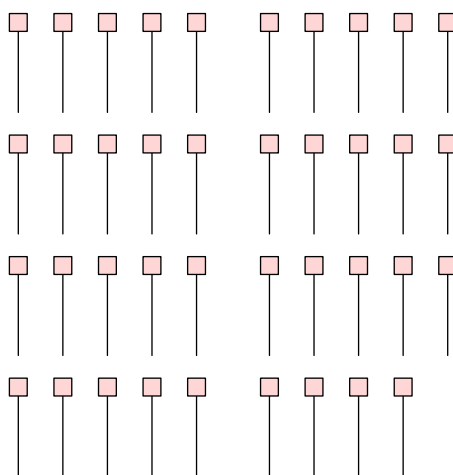
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

## Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **2, 3 ou 5** allumette(s) — pas le choix de passer.

**Celui qui prend la dernière allumette** gagne.

Voici le tas de départ, **39 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **9 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **39 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



# Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°278



ALLU0278

## Correction

### Le jeu des allumettes — Correction

**Le bon point de vue.** Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a gagné, donc **0 est une position perdante**.

1. Construisons le tableau jusqu'à 9 :

| Allumettes restantes     | 0           | 1           | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7           | 8           | 9     |
|--------------------------|-------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|-------|
| Le joueur qui doit jouer | <b>perd</b> | <b>perd</b> | gagne | gagne | gagne | gagne | gagne | <b>perd</b> | <b>perd</b> | gagne |

**Avec 9 allumettes, la position de départ est gagnante : Alice a une façon de l'emporter à coup sûr.**

Son coup : retirer **2** allumette(s), ce qui laisse 7 — une position perdante pour Bruno.

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 39. Les positions perdantes rencontrées sont :

**1, 7, 8, 14, 15, 21, 22, 28, 29, ...**

**39 est une position gagnante : Alice gagne.**

Son premier coup : retirer **3** allumette(s), ce qui laisse **36** — position perdante pour Bruno.

Ensuite, sa stratégie est mécanique : à chaque tour, elle ramène le tas sur la position perdante suivante. Bruno ne peut jamais y échapper.

3.

**Les positions perdantes sont : 0, 1, 7, 8, 14, 15, 21, 22, 28, 29, ...**

**Il y a un motif.** La suite des positions perdantes se répète avec une **période de 7** : une position  $i$  est perdante exactement lorsque le reste de la division de  $i$  par 7 vaut 0 ou 1.

**Pourquoi une période ?** Le classement d'une position ne dépend que des 5 positions qui la précèdent. Comme il n'y a qu'un nombre fini de configurations possibles pour ces 5 cases, la suite finit **nécessairement** par se répéter — c'est le principe des tiroirs.

**Ici 39 laisse le reste 4 dans la division par 7 : position gagnante.**

**Ce que cette famille apprend.** Quand les coups autorisés ne forment plus une suite 1, 2, ...,  $k$ , il n'y a **pas de formule évidente** : il faut construire le tableau. Mais un motif finit toujours par apparaître, et c'est lui qui donne la stratégie.

**À retenir, bien au-delà des allumettes.** Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.