



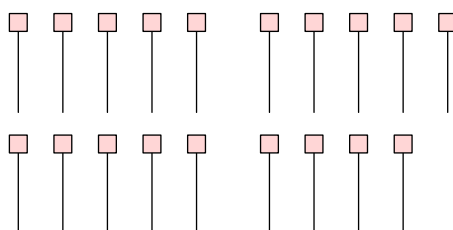
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

## Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **1, 2, 3 ou 4** allumette(s) — pas le choix de passer.

**Celui qui prend la dernière allumette perd.**

Voici le tas de départ, **19 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **15 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **19 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



# Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°282



ALLU0282

## Correction

### Le jeu des allumettes — Correction

**Le bon point de vue.** Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a **perdu**, donc **0 est une position gagnante** pour celui qui la reçoit.

1. Construisons le tableau jusqu'à 15 :

| Allumettes restantes     | 0     | 1           | 2     | 3     | 4     | 5     | 6           | 7     | 8     | 9     | 10    |
|--------------------------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------|
| Le joueur qui doit jouer | gagne | <b>perd</b> | gagne | gagne | gagne | gagne | <b>perd</b> | gagne | gagne | gagne | gagne |

**Avec 15 allumettes, la position de départ est gagnante : Alice a une façon de l'emporter à coup sûr.**

Son coup : retirer 4 allumette(s), ce qui laisse 11 — une position perdante pour Bruno.

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 19. Les positions perdantes rencontrées sont :

**1, 6, 11, 16, 21, 26, ...**

**19 est une position gagnante : Alice gagne.**

Son premier coup : retirer 3 allumette(s), ce qui laisse 16 — position perdante pour Bruno.

Ensuite, sa stratégie est mécanique : à chaque tour, elle ramène le tas sur la position perdante suivante. Bruno ne peut jamais y échapper.

3.

**Les positions perdantes sont les nombres de la forme  $5q + 1$  : 1, 6, 11, 16, ...**

**Pourquoi ce décalage ?** Le but a changé : prendre la dernière allumette fait **perdre**. Tout se passe donc comme si l'on jouait au jeu ordinaire sur un tas amputé de la dernière allumette — celle qu'il faut **laisser** à l'adversaire. D'où la règle décalée de 1.

**La stratégie.** Laisser toujours à l'adversaire un nombre d'allumettes de la forme  $5q + 1$  ; il finira nécessairement par devoir prendre la dernière.

**Ici  $19 - 1 = 18$ , qui n'est pas multiple de 5 : position gagnante.**

**À retenir, bien au-delà des allumettes.** Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.