



Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°29



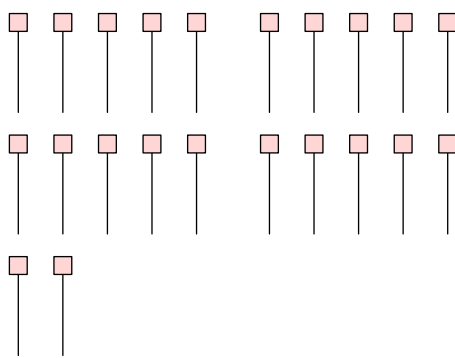
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **1, 3 ou 5** allumette(s) — pas le choix de passer.

Celui qui prend la dernière allumette gagne.

Voici le tas de départ, **22 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **10 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **22 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



Correction

Le jeu des allumettes — Correction

Le bon point de vue. Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a gagné, donc **0 est une position perdante**.

1. Construisons le tableau jusqu'à 10 :

Allumettes restantes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Le joueur qui doit jouer	perd	gagne	perd	gagne	perd	gagne	perd	gagne	perd	gagne	perd

Avec 10 allumettes, la position de départ est perdante : Alice, qui commence, ne peut pas gagner si Bruno joue bien.

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 22. Les positions perdantes rencontrées sont :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, ...

22 est une position perdante. Alice, qui commence, est donc condamnée : quoi qu'elle joue, Bruno peut toujours lui rendre une position perdante.

C'est Bruno qui gagne, à condition de jouer correctement.

3.

Les positions perdantes sont : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, ...

Il y a un motif. La suite des positions perdantes se répète avec une **période de 2** : une position i est perdante exactement lorsque le reste de la division de i par 2 vaut 0.

Pourquoi une période ? Le classement d'une position ne dépend que des 5 positions qui la précèdent. Comme il n'y a qu'un nombre fini de configurations possibles pour ces 5 cases, la suite finit **nécessairement** par se répéter — c'est le principe des tiroirs.

Ici 22 laisse le reste 0 dans la division par 2 : position perdante.

Ce que cette famille apprend. Quand les coups autorisés ne forment plus une suite $1, 2, \dots, k$, il n'y a **pas de formule évidente** : il faut construire le tableau. Mais un motif finit toujours par apparaître, et c'est lui qui donne la stratégie.

À retenir, bien au-delà des allumettes. Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.