



Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°55



ALLU0055

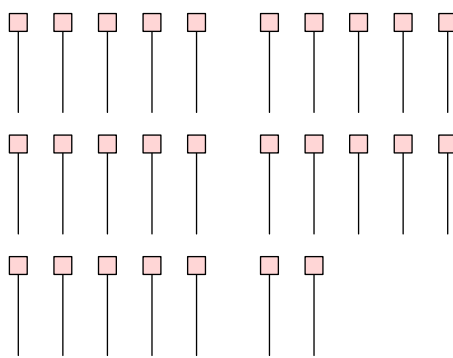
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **1 ou 2** allumette(s) — pas le choix de passer.

Celui qui prend la dernière allumette gagne.

Voici le tas de départ, **27 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **7 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **27 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



Correction

Le jeu des allumettes — Correction

Le bon point de vue. Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a gagné, donc **0 est une position perdante**.

1. Construisons le tableau jusqu'à 7 :

Allumettes restantes	0	1	2	3	4	5	6	7
Le joueur qui doit jouer	perd	gagne	gagne	perd	gagne	gagne	perd	gagne

Avec 7 allumettes, la position de départ est gagnante : Alice a une façon de l'emporter à coup sûr.

Son coup : retirer 1 allumette(s), ce qui laisse 6 — une position perdante pour Bruno.

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 27. Les positions perdantes rencontrées sont :

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...

27 est une position perdante. Alice, qui commence, est donc condamnée : quoi qu'elle joue, Bruno peut toujours lui rendre une position perdante.

C'est Bruno qui gagne, à condition de jouer correctement.

3.

Les positions perdantes sont exactement les multiples de 3 : 0, 3, 6, 9, ...

Pourquoi ? Depuis un multiple de 3, tout coup retire entre 1 et 2 allumettes : on tombe donc forcément sur un nombre qui **n'est pas** un multiple de 3. Inversement, depuis un nombre qui n'est pas multiple de 3, on peut toujours retirer juste ce qu'il faut (entre 1 et 2) pour retomber sur le multiple de 3 juste en dessous.

La stratégie. Celui qui laisse toujours à l'autre un multiple de 3 gagne. Et il y parvient toujours : si le tas vaut $3q + r$ avec r entre 1 et 2, il retire r . C'est l'astuce des « allumettes complémentaires » — si l'adversaire prend a , on prend $3 - a$.

Ici $27 = 3 \times 9$: c'est un multiple, position perdante.

À retenir, bien au-delà des allumettes. Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.