



# Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°59



ALLU0059

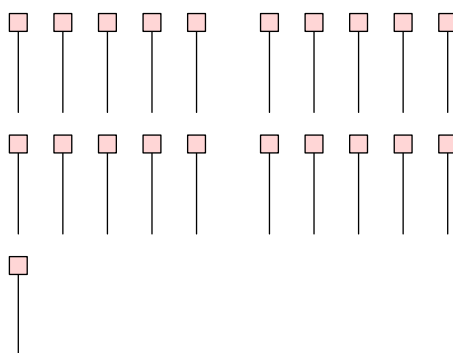
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

## Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **1, 2 ou 5** allumette(s) — pas le choix de passer.

**Celui qui prend la dernière allumette** gagne.

Voici le tas de départ, **21 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **15 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **21 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



## Correction

### Le jeu des allumettes — Correction

**Le bon point de vue.** Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a gagné, donc **0 est une position perdante**.

1. Construisons le tableau jusqu'à 15 :

| Allumettes restantes     | 0           | 1     | 2     | 3           | 4     | 5     | 6           | 7     | 8     | 9           | 10    |
|--------------------------|-------------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------------|-------|
| Le joueur qui doit jouer | <b>perd</b> | gagne | gagne | <b>perd</b> | gagne | gagne | <b>perd</b> | gagne | gagne | <b>perd</b> | gagne |

**Avec 15 allumettes, la position de départ est perdante : Alice, qui commence, ne peut pas gagner si Bruno joue bien.**

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 21. Les positions perdantes rencontrées sont :

**3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...**

**21 est une position perdante. Alice, qui commence, est donc condamnée : quoi qu'elle joue, Bruno peut toujours lui rendre une position perdante.**

**C'est Bruno qui gagne, à condition de jouer correctement.**

3.

**Les positions perdantes sont : 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, ...**

**Il y a un motif.** La suite des positions perdantes se répète avec une **période de 3** : une position  $i$  est perdante exactement lorsque le reste de la division de  $i$  par 3 vaut 0.

**Pourquoi une période ?** Le classement d'une position ne dépend que des 5 positions qui la précèdent. Comme il n'y a qu'un nombre fini de configurations possibles pour ces 5 cases, la suite finit **nécessairement** par se répéter — c'est le principe des tiroirs.

**Ici 21 laisse le reste 0 dans la division par 3 : position perdante.**

**Ce que cette famille apprend.** Quand les coups autorisés ne forment plus une suite 1, 2, ...,  $k$ , il n'y a **pas de formule évidente** : il faut construire le tableau. Mais un motif finit toujours par apparaître, et c'est lui qui donne la stratégie.

**À retenir, bien au-delà des allumettes.** Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.