



# Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°67



ALLU0067

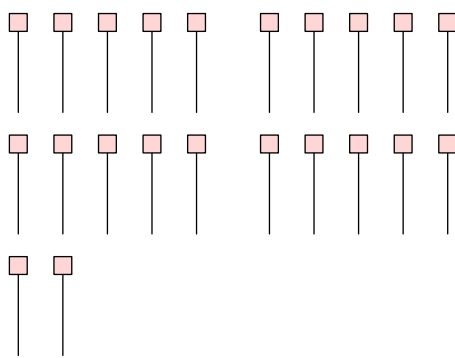
Deux joueurs, un tas d'allumettes, et une règle très simple. Pourtant, l'un des deux peut gagner à coup sûr — quoi que fasse l'autre — à condition de savoir où sont les positions perdantes. Les découvrir demande de raisonner à l'envers, en partant de la fin de la partie.

## Le jeu des allumettes

Deux joueurs, **Alice et Bruno**, disposent d'un tas d'allumettes. Ils jouent **chacun leur tour**, Alice commence. À son tour, un joueur doit retirer **1 ou 2** allumette(s) — pas le choix de passer.

**Celui qui prend la dernière allumette perd.**

Voici le tas de départ, **22 allumettes** :



Les questions montent en difficulté : la première se traite à la main, la dernière demande une règle générale et sa justification.

1. **Pour commencer**, on joue avec un petit tas de **11 allumettes**. Alice a-t-elle une façon de gagner à coup sûr ? On pourra examiner les situations une par une, en partant de 0 allumette.
2. Revenons au tas de **22 allumettes**. **Qui gagne**, si les deux joueurs jouent parfaitement ? Si c'est Alice, quel est son **premier coup** ?
3. **Décrire toutes les positions perdantes** — celles où le joueur qui doit jouer est condamné, quoi qu'il fasse. Justifier la règle trouvée.



# Le jeu des allumettes

Problème — Fiche n°67



ALLU0067

## Correction

### Le jeu des allumettes — Correction

**Le bon point de vue.** Ne cherchons pas « quel coup jouer », mais classons chaque **position** (le nombre d'allumettes restantes) en deux catégories, du point de vue du joueur qui **doit jouer** :

- une position est **perdante** si **tous** les coups possibles offrent à l'adversaire une position gagnante ;
- une position est **gagnante** s'il **existe** au moins un coup donnant à l'adversaire une position perdante.

On construit ce classement **à partir de la fin**, en partant de 0 allumette. Se retrouver devant 0 allumette signifie que l'adversaire vient de prendre la dernière : il a **perdu**, donc **0 est une position gagnante** pour celui qui la reçoit.

1. Construisons le tableau jusqu'à 11 :

| Allumettes restantes     | 0     | 1    | 2     | 3     | 4    | 5     | 6     | 7    | 8     | 9     | 10   |
|--------------------------|-------|------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|-------|------|
| Le joueur qui doit jouer | gagne | perd | gagne | gagne | perd | gagne | gagne | perd | gagne | gagne | perd |

**Avec 11 allumettes, la position de départ est gagnante : Alice a une façon de l'emporter à coup sûr.**

Son coup : retirer 1 allumette(s), ce qui laisse 10 — une position perdante pour Bruno.

2. Poursuivons le même tableau jusqu'à 22. Les positions perdantes rencontrées sont :

**1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, ...**

**22 est une position perdante. Alice, qui commence, est donc condamnée : quoi qu'elle joue, Bruno peut toujours lui rendre une position perdante.**

**C'est Bruno qui gagne, à condition de jouer correctement.**

3.

**Les positions perdantes sont les nombres de la forme  $3q + 1$  : 1, 4, 7, 10, ...**

**Pourquoi ce décalage ?** Le but a changé : prendre la dernière allumette fait **perdre**. Tout se passe donc comme si l'on jouait au jeu ordinaire sur un tas amputé de la dernière allumette — celle qu'il faut **laisser** à l'adversaire. D'où la règle décalée de 1.

**La stratégie.** Laisser toujours à l'adversaire un nombre d'allumettes de la forme  $3q + 1$  ; il finira nécessairement par devoir prendre la dernière.

**Ici  $22 - 1 = 21$ , multiple de 3 : position perdante.**

**À retenir, bien au-delà des allumettes.** Analyser un jeu à deux, c'est classer les positions en gagnantes et perdantes en remontant depuis la fin. La même méthode s'applique à quantité de jeux — et c'est exactement ce que fait un programme d'échecs, en beaucoup plus gros.