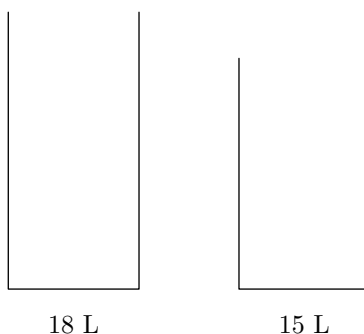




Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

## Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **18 litres**, l'autre **15 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. **Pour se lancer** : obtenir exactement **3 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes.
2. Obtenir exactement **8 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
3. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.



## Correction

### Les deux bidons — Correction

**Comment noter les choses.** On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 18 L, puis celui du bidon de 15 L. On part de (0 ; 0), et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Pour obtenir 3 L :

| Geste                              | Bidon de 18 L | Bidon de 15 L |
|------------------------------------|---------------|---------------|
| Départ                             | 0 L           | 0 L           |
| 1. remplir le bidon de 18 L        | 18 L          | 0 L           |
| 2. transvaser le 18 L dans le 15 L | 3 L           | 15 L          |

**En 2 gestes, on a bien 3 L.**

2. Cherchons ce que les gestes autorisés peuvent produire.

**L'invariant.** Le PGCD de 18 et 15 vaut **3**. Observons qu'à chaque instant, le contenu de chaque bidon est un **multiple de 3** :

- au départ, les deux bidons contiennent 0, qui est multiple de 3 ;
- **remplir** met 18 ou 15 litres, tous deux multiples de 3 ;
- **vider** met 0, multiple de 3 ;
- **transvaser** ne fait qu'ajouter à l'un ce qu'il retire à l'autre : une différence de multiples de 3 reste un multiple de 3.

**Donc, quoi qu'on fasse et aussi longtemps qu'on s'acharne, chaque bidon contient toujours un multiple de 3.**

**Or 8 n'est pas un multiple de 3 ( $8 \div 3$  ne tombe pas juste). Obtenir 8 litres est donc impossible.**

**Le point de méthode.** On n'a essayé aucune combinaison. On a montré qu'une propriété vraie au départ reste vraie après chaque geste, et qu'elle interdit le but. C'est un raisonnement par **invariant** — le même que celui du damier et des dominos.

3. Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

**0 L, 3 L, 6 L, 9 L, 12 L, 15 L, 18 L.**

Ce sont exactement les **multiples de 3** compris entre 0 et 18 — et 3 est le **PGCD de 18 et 15**.

**Ici  $\text{PGCD}(18; 15) = 3$  : seuls les multiples de 3 sont réalisables — soit 7 volumes sur les 19 envisageables.**

**Le résultat général.** Avec deux bidons de contenances  $a$  et  $b$ , on peut obtenir exactement les multiples de  $\text{PGCD}(a; b)$ , et rien d'autre. En particulier, si  $a$  et  $b$  n'ont aucun diviseur commun autre que 1, **tous** les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

**Pour aller plus loin.** Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume  $v$  revient à trouver deux entiers  $u$  et  $w$  tels que  $u \times a + w \times b = v$  — remplir  $u$  fois le premier bidon et vider  $w$  fois le second.