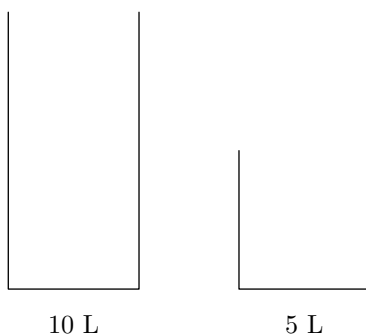




Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

## Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **10 litres**, l'autre **5 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. Obtenir exactement **7 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
2. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.



## Les deux bidons

Problème — Fiche n°160



### Correction

#### Les deux bidons — Correction

**Comment noter les choses.** On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 10 L, puis celui du bidon de 5 L. On part de  $(0; 0)$ , et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Cherchons ce que les gestes autorisés peuvent produire.

**L'invariant.** Le PGCD de 10 et 5 vaut **5**. Observons qu'à chaque instant, le contenu de chaque bidon est un **multiple de 5** :

- au départ, les deux bidons contiennent 0, qui est multiple de 5 ;
- **remplir** met 10 ou 5 litres, tous deux multiples de 5 ;
- **vider** met 0, multiple de 5 ;
- **transvaser** ne fait qu'ajouter à l'un ce qu'il retire à l'autre : une différence de multiples de 5 reste un multiple de 5.

**Donc, quoi qu'on fasse et aussi longtemps qu'on s'acharne, chaque bidon contient toujours un multiple de 5.**

**Or 7 n'est pas un multiple de 5 ( $7 \div 5$  ne tombe pas juste). Obtenir 7 litres est donc impossible.**

**Le point de méthode.** On n'a essayé aucune combinaison. On a montré qu'une propriété vraie au départ reste vraie après chaque geste, et qu'elle interdit le but. C'est un raisonnement par **invariant** — le même que celui du damier et des dominos.

2. Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

**0 L, 5 L, 10 L.**

Ce sont exactement les **multiples de 5** compris entre 0 et 10 — et 5 est le **PGCD de 10 et 5**.

**Ici  $\text{PGCD}(10; 5) = 5$  : seuls les multiples de 5 sont réalisables — soit 3 volumes sur les 11 envisageables.**

**Le résultat général.** Avec deux bidons de contenances  $a$  et  $b$ , on peut obtenir exactement les multiples de  $\text{PGCD}(a; b)$ , et rien d'autre. En particulier, si  $a$  et  $b$  n'ont aucun diviseur commun autre que 1, **tous** les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

**Pour aller plus loin.** Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume  $v$  revient à trouver deux entiers  $u$  et  $w$  tels que  $u \times a + w \times b = v$  — remplir  $u$  fois le premier bidon et vider  $w$  fois le second.