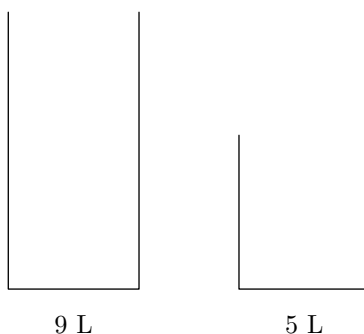




Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **9 litres**, l'autre **5 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. **Pour se lancer** : obtenir exactement **4 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes.
2. Obtenir exactement **1 litre** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
3. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.



Les deux bidons

Problème — Fiche n°203



BID00203

Correction

Les deux bidons — Correction

Comment noter les choses. On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 9 L, puis celui du bidon de 5 L. On part de (0 ; 0), et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Pour obtenir 4 L :

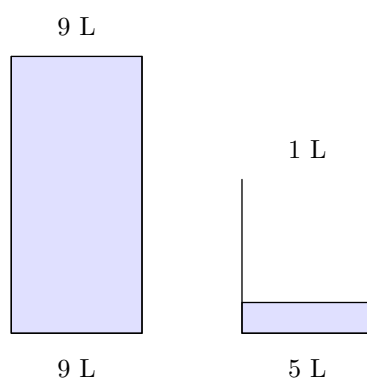
Geste	Bidon de 9 L	Bidon de 5 L
Départ	0 L	0 L
1. remplir le bidon de 9 L	9 L	0 L
2. transvaser le 9 L dans le 5 L	4 L	5 L

En 2 gestes, on a bien 4 L.

2. Pour obtenir 1 L :

Geste	Bidon de 9 L	Bidon de 5 L
Départ	0 L	0 L
1. remplir le bidon de 5 L	0 L	5 L
2. transvaser le 5 L dans le 9 L	5 L	0 L
3. remplir le bidon de 5 L	5 L	5 L
4. transvaser le 5 L dans le 9 L	9 L	1 L

En 4 gestes, l'un des bidons contient exactement 1 litre.



La situation finale.

C'est la solution la **plus courte** : aucune suite de moins de 4 gestes n'y parvient. D'autres chemins existent, plus longs.

3. Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

0 L, 1 L, 2 L, 3 L, 4 L, 5 L, 6 L, 7 L, 8 L, 9 L.

Ce sont exactement les **multiples de 1** compris entre 0 et 9 — et 1 est le **PGCD de 9 et 5**.

Ici PGCD(9 ; 5) = 1 : tous les volumes entiers de 0 à 9 litres sont réalisables.

Le résultat général. Avec deux bidons de contenances a et b , on peut obtenir exactement les multiples de $\text{PGCD}(a ; b)$, et rien d'autre. En particulier, si a et b n'ont aucun diviseur commun autre que 1,



Les deux bidons

Problème — Fiche n°203



BID00203

tous les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

Pour aller plus loin. Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume v revient à trouver deux entiers u et w tels que $u \times a + w \times b = v$ — remplir u fois le premier bidon et vider w fois le second.