



Les deux bidons

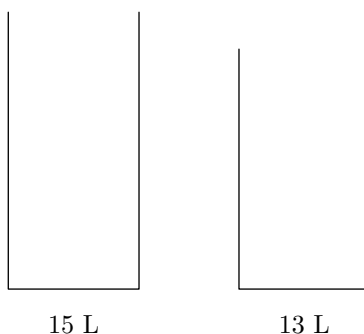
Problème — Fiche n°207



Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **15 litres**, l'autre **13 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. **Pour se lancer** : obtenir exactement **2 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes.
2. Obtenir exactement **12 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
3. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.

Correction

Les deux bidons — Correction

Comment noter les choses. On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 15 L, puis celui du bidon de 13 L. On part de (0 ; 0), et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Pour obtenir 2 L :

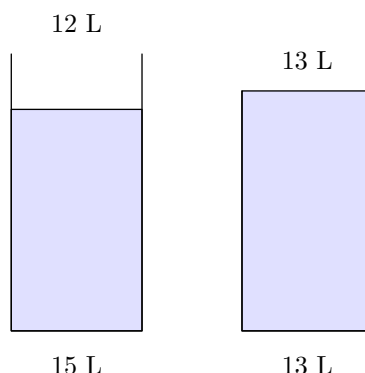
Geste	Bidon de 15 L	Bidon de 13 L
Départ	0 L	0 L
1. remplir le bidon de 15 L	15 L	0 L
2. transvaser le 15 L dans le 13 L	2 L	13 L

En 2 gestes, on a bien 2 L.

2. Pour obtenir 12 L :

Geste	Bidon de 15 L	Bidon de 13 L
Départ	0 L	0 L
1. remplir le bidon de 15 L	15 L	0 L
2. transvaser le 15 L dans le 13 L	2 L	13 L
3. vider le bidon de 13 L	2 L	0 L
4. transvaser le 15 L dans le 13 L	0 L	2 L
5. remplir le bidon de 15 L	15 L	2 L
6. transvaser le 15 L dans le 13 L	4 L	13 L
7. vider le bidon de 13 L	4 L	0 L
8. transvaser le 15 L dans le 13 L	0 L	4 L
9. remplir le bidon de 15 L	15 L	4 L
10. transvaser le 15 L dans le 13 L	6 L	13 L
11. vider le bidon de 13 L	6 L	0 L
12. transvaser le 15 L dans le 13 L	0 L	6 L
13. remplir le bidon de 15 L	15 L	6 L
14. transvaser le 15 L dans le 13 L	8 L	13 L
15. vider le bidon de 13 L	8 L	0 L
16. transvaser le 15 L dans le 13 L	0 L	8 L
17. remplir le bidon de 15 L	15 L	8 L
18. transvaser le 15 L dans le 13 L	10 L	13 L
19. vider le bidon de 13 L	10 L	0 L
20. transvaser le 15 L dans le 13 L	0 L	10 L
21. remplir le bidon de 15 L	15 L	10 L
22. transvaser le 15 L dans le 13 L	12 L	13 L

En 22 gestes, l'un des bidons contient exactement 12 litres.



La situation finale.

C'est la solution la **plus courte** : aucune suite de moins de 22 gestes n'y parvient. D'autres chemins existent, plus longs.

3. Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

0 L, 1 L, 2 L, 3 L, 4 L, 5 L, 6 L, 7 L, 8 L, 9 L, 10 L, 11 L, 12 L, 13 L, 14 L, 15 L.

Ce sont exactement les **multiples de 1** compris entre 0 et 15 — et 1 est le **PGCD de 15 et 13**.

Ici $\text{PGCD}(15; 13) = 1$: tous les volumes entiers de 0 à 15 litres sont réalisables.

Le résultat général. Avec deux bidons de contenances a et b , on peut obtenir exactement les multiples de $\text{PGCD}(a; b)$, et rien d'autre. En particulier, si a et b n'ont aucun diviseur commun autre que 1, **tous** les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

Pour aller plus loin. Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume v revient à trouver deux entiers u et w tels que $u \times a + w \times b = v$ — remplir u fois le premier bidon et vider w fois le second.