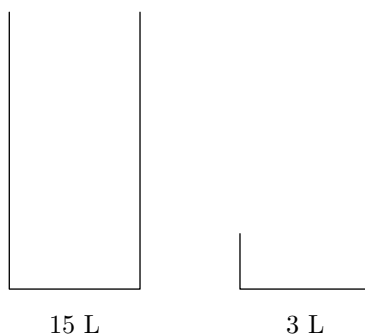




Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **15 litres**, l'autre **3 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. **Pour se lancer** : obtenir exactement **12 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes.
2. Obtenir exactement **13 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
3. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.



Correction

Les deux bidons — Correction

Comment noter les choses. On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 15 L, puis celui du bidon de 3 L. On part de (0 ; 0), et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Pour obtenir 12 L :

Geste	Bidon de 15 L	Bidon de 3 L
Départ	0 L	0 L
1. remplir le bidon de 15 L	15 L	0 L
2. transvaser le 15 L dans le 3 L	12 L	3 L

En 2 gestes, on a bien 12 L.

2. Cherchons ce que les gestes autorisés peuvent produire.

L'invariant. Le PGCD de 15 et 3 vaut **3**. Observons qu'à chaque instant, le contenu de chaque bidon est un **multiple de 3** :

- au départ, les deux bidons contiennent 0, qui est multiple de 3 ;
- **remplir** met 15 ou 3 litres, tous deux multiples de 3 ;
- **vider** met 0, multiple de 3 ;
- **transvaser** ne fait qu'ajouter à l'un ce qu'il retire à l'autre : une différence de multiples de 3 reste un multiple de 3.

Donc, quoi qu'on fasse et aussi longtemps qu'on s'acharne, chaque bidon contient toujours un multiple de 3.

Or 13 n'est pas un multiple de 3 ($13 \div 3$ ne tombe pas juste). Obtenir 13 litres est donc impossible.

Le point de méthode. On n'a essayé aucune combinaison. On a montré qu'une propriété vraie au départ reste vraie après chaque geste, et qu'elle interdit le but. C'est un raisonnement par **invariant** — le même que celui du damier et des dominos.

3. Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

0 L, 3 L, 6 L, 9 L, 12 L, 15 L.

Ce sont exactement les **multiples de 3** compris entre 0 et 15 — et 3 est le **PGCD de 15 et 3**.

Ici $\text{PGCD}(15 ; 3) = 3$: seuls les multiples de 3 sont réalisables — soit 6 volumes sur les 16 envisageables.

Le résultat général. Avec deux bidons de contenances a et b , on peut obtenir exactement les multiples de $\text{PGCD}(a ; b)$, et rien d'autre. En particulier, si a et b n'ont aucun diviseur commun autre que 1, **tous** les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

Pour aller plus loin. Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume v revient à trouver deux entiers u et w tels que $u \times a + w \times b = v$ — remplir u fois le premier bidon et vider w fois le second.