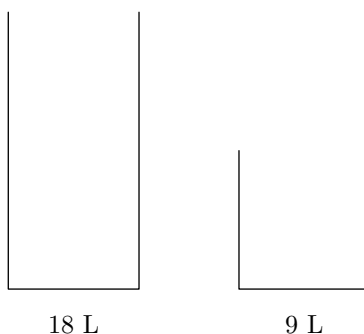




Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **18 litres**, l'autre **9 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. Obtenir exactement **13 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
2. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.



Correction

Les deux bidons — Correction

Comment noter les choses. On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 18 L, puis celui du bidon de 9 L. On part de $(0; 0)$, et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Cherchons ce que les gestes autorisés peuvent produire.

L'invariant. Le PGCD de 18 et 9 vaut **9**. Observons qu'à chaque instant, le contenu de chaque bidon est un **multiple de 9** :

- au départ, les deux bidons contiennent 0, qui est multiple de 9 ;
- **remplir** met 18 ou 9 litres, tous deux multiples de 9 ;
- **vider** met 0, multiple de 9 ;
- **transvaser** ne fait qu'ajouter à l'un ce qu'il retire à l'autre : une différence de multiples de 9 reste un multiple de 9.

Donc, quoi qu'on fasse et aussi longtemps qu'on s'acharne, chaque bidon contient toujours un multiple de 9.

Or 13 n'est pas un multiple de 9 ($13 \div 9$ ne tombe pas juste). Obtenir 13 litres est donc impossible.

Le point de méthode. On n'a essayé aucune combinaison. On a montré qu'une propriété vraie au départ reste vraie après chaque geste, et qu'elle interdit le but. C'est un raisonnement par **invariant** — le même que celui du damier et des dominos.

2. Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

0 L, 9 L, 18 L.

Ce sont exactement les **multiples de 9** compris entre 0 et 18 — et 9 est le **PGCD de 18 et 9**.

Ici $\text{PGCD}(18; 9) = 9$: seuls les multiples de 9 sont réalisables — soit 3 volumes sur les 19 envisageables.

Le résultat général. Avec deux bidons de contenances a et b , on peut obtenir exactement les multiples de $\text{PGCD}(a; b)$, et rien d'autre. En particulier, si a et b n'ont aucun diviseur commun autre que 1, **tous** les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

Pour aller plus loin. Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume v revient à trouver deux entiers u et w tels que $u \times a + w \times b = v$ — remplir u fois le premier bidon et vider w fois le second.