



## Les deux bidons

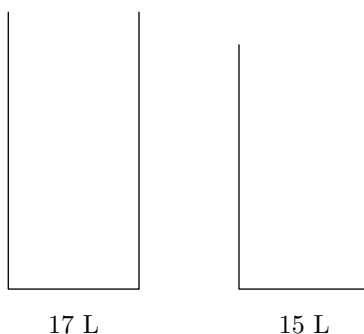
Problème — Fiche n°318



Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

### Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **17 litres**, l'autre **15 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. **Pour se lancer** : obtenir exactement **2 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes.
2. Obtenir exactement **12 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
3. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.

## Correction

### Les deux bidons — Correction

**Comment noter les choses.** On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 17 L, puis celui du bidon de 15 L. On part de (0 ; 0), et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Pour obtenir 2 L :

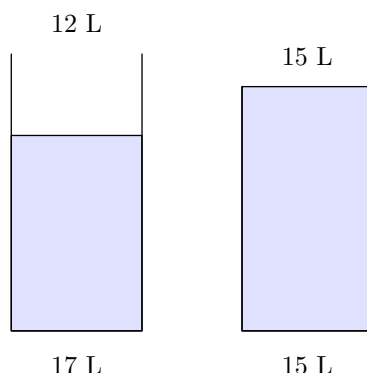
| Geste                              | Bidon de 17 L | Bidon de 15 L |
|------------------------------------|---------------|---------------|
| Départ                             | 0 L           | 0 L           |
| 1. remplir le bidon de 17 L        | 17 L          | 0 L           |
| 2. transvaser le 17 L dans le 15 L | 2 L           | 15 L          |

**En 2 gestes, on a bien 2 L.**

2. Pour obtenir 12 L :

| Geste                               | Bidon de 17 L | Bidon de 15 L |
|-------------------------------------|---------------|---------------|
| Départ                              | 0 L           | 0 L           |
| 1. remplir le bidon de 17 L         | 17 L          | 0 L           |
| 2. transvaser le 17 L dans le 15 L  | 2 L           | 15 L          |
| 3. vider le bidon de 15 L           | 2 L           | 0 L           |
| 4. transvaser le 17 L dans le 15 L  | 0 L           | 2 L           |
| 5. remplir le bidon de 17 L         | 17 L          | 2 L           |
| 6. transvaser le 17 L dans le 15 L  | 4 L           | 15 L          |
| 7. vider le bidon de 15 L           | 4 L           | 0 L           |
| 8. transvaser le 17 L dans le 15 L  | 0 L           | 4 L           |
| 9. remplir le bidon de 17 L         | 17 L          | 4 L           |
| 10. transvaser le 17 L dans le 15 L | 6 L           | 15 L          |
| 11. vider le bidon de 15 L          | 6 L           | 0 L           |
| 12. transvaser le 17 L dans le 15 L | 0 L           | 6 L           |
| 13. remplir le bidon de 17 L        | 17 L          | 6 L           |
| 14. transvaser le 17 L dans le 15 L | 8 L           | 15 L          |
| 15. vider le bidon de 15 L          | 8 L           | 0 L           |
| 16. transvaser le 17 L dans le 15 L | 0 L           | 8 L           |
| 17. remplir le bidon de 17 L        | 17 L          | 8 L           |
| 18. transvaser le 17 L dans le 15 L | 10 L          | 15 L          |
| 19. vider le bidon de 15 L          | 10 L          | 0 L           |
| 20. transvaser le 17 L dans le 15 L | 0 L           | 10 L          |
| 21. remplir le bidon de 17 L        | 17 L          | 10 L          |
| 22. transvaser le 17 L dans le 15 L | 12 L          | 15 L          |

**En 22 gestes, l'un des bidons contient exactement 12 litres.**



*La situation finale.*

C'est la solution la **plus courte** : aucune suite de moins de 22 gestes n'y parvient. D'autres chemins existent, plus longs.

**3.** Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

**0 L, 1 L, 2 L, 3 L, 4 L, 5 L, 6 L, 7 L, 8 L, 9 L, 10 L, 11 L, 12 L, 13 L, 14 L, 15 L, 16 L, 17 L.**

Ce sont exactement les **multiples de 1** compris entre 0 et 17 — et 1 est le **PGCD de 17 et 15**.

**Ici  $\text{PGCD}(17; 15) = 1$  : tous les volumes entiers de 0 à 17 litres sont réalisables.**

**Le résultat général.** Avec deux bidons de contenances  $a$  et  $b$ , on peut obtenir exactement les multiples de  $\text{PGCD}(a; b)$ , et rien d'autre. En particulier, si  $a$  et  $b$  n'ont aucun diviseur commun autre que 1, **tous** les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

**Pour aller plus loin.** Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume  $v$  revient à trouver deux entiers  $u$  et  $w$  tels que  $u \times a + w \times b = v$  — remplir  $u$  fois le premier bidon et vider  $w$  fois le second.