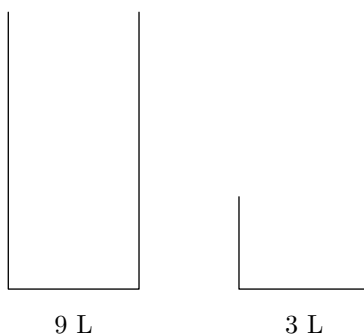




Deux bidons sans aucune graduation, une rivière à volonté, et le droit de vider par terre. Obtenir un volume au litre près paraît relever de la chance : c'est en réalité une question d'arithmétique, et certains volumes sont hors d'atteinte quoi qu'on fasse.

## Les deux bidons

Vous disposez de deux bidons **sans aucune graduation** : l'un contient **9 litres**, l'autre **3 litres**. Vous êtes au bord d'une rivière.



Trois gestes seulement sont autorisés :

- **remplir** complètement un bidon à la rivière ;
- **vider** entièrement un bidon par terre ;
- **transvaser** un bidon dans l'autre, jusqu'à ce que le premier soit vide **ou** que le second soit plein.

Impossible donc de « remplir à moitié » : on ne peut pas mesurer à l'œil, seuls comptent les bidons pleins ou vides.

Les trois questions montent en difficulté : la dernière demande de raisonner sur **tous** les volumes à la fois.

1. Obtenir exactement **6 litres** dans l'un des deux bidons. Décrire les gestes — ou **démontrer que c'est impossible**.
2. **Quels sont TOUS les volumes** que l'on peut obtenir avec ces deux bidons ? Justifier.

## Correction

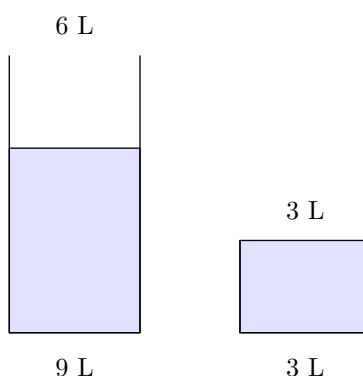
### Les deux bidons — Correction

**Comment noter les choses.** On décrit la situation par un couple : le contenu du bidon de 9 L, puis celui du bidon de 3 L. On part de (0 ; 0), et chaque geste fait passer d'un couple au suivant. Le problème devient alors un parcours, et non plus une devinette.

1. Pour obtenir 6 L :

| Geste                            | Bidon de 9 L | Bidon de 3 L |
|----------------------------------|--------------|--------------|
| Départ                           | 0 L          | 0 L          |
| 1. remplir le bidon de 9 L       | 9 L          | 0 L          |
| 2. transvaser le 9 L dans le 3 L | 6 L          | 3 L          |

En 2 gestes, l'un des bidons contient exactement 6 litres.



*La situation finale.*

C'est la solution la **plus courte** : aucune suite de moins de 2 gestes n'y parvient. D'autres chemins existent, plus longs.

2. Listons ce que l'on peut atteindre. En explorant toutes les situations possibles, les volumes obtenus sont :

**0 L, 3 L, 6 L, 9 L.**

Ce sont exactement les **multiples de 3** compris entre 0 et 9 — et 3 est le **PGCD de 9 et 3**.

**Ici  $\text{PGCD}(9 ; 3) = 3$  : seuls les multiples de 3 sont réalisables — soit 4 volumes sur les 10 envisageables.**

**Le résultat général.** Avec deux bidons de contenances  $a$  et  $b$ , on peut obtenir exactement les multiples de  $\text{PGCD}(a ; b)$ , et rien d'autre. En particulier, si  $a$  et  $b$  n'ont aucun diviseur commun autre que 1, **tous** les volumes entiers sont atteignables — aussi étonnant que cela paraisse avec deux bidons non gradués.

**Pour aller plus loin.** Ce résultat porte un nom : c'est le **théorème de Bézout**. Obtenir un volume  $v$  revient à trouver deux entiers  $u$  et  $w$  tels que  $u \times a + w \times b = v$  — remplir  $u$  fois le premier bidon et vider  $w$  fois le second.