La tournée du facteur

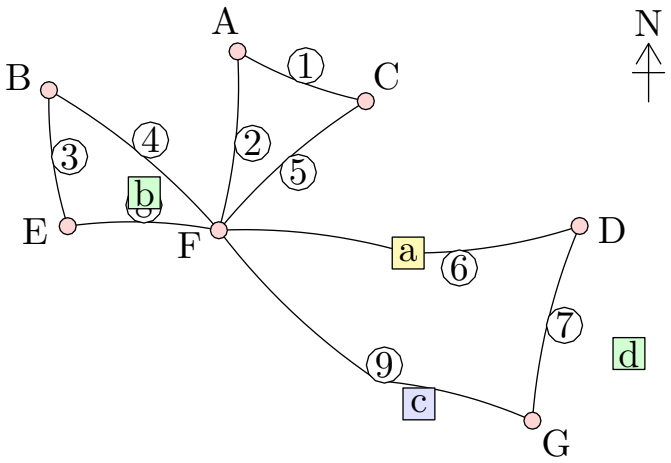
Problème — Fiche n°10

EULE0010

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① chemin des Vignes	⑥ sentier des Prés	Ⓐ Coin du Lavoir	**a** la poste
② rue Haute	⑦ allée des Tilleuls	Ⓑ Place de l'Église	**b** la mairie
③ chemin Creux	⑧ chemin de Ronde	Ⓒ Place Sainte-Croix	**c** l'école
④ quai aux Fleurs	⑨ passage du Marché	Ⓓ Place de la Fontaine	**d** la gendarmerie
⑤ rue de l'Église		Ⓔ Fontaine Notre-Dame	
		Ⓕ Rond-point des Vaches	
		Ⓖ Place du Vieux-Puits	

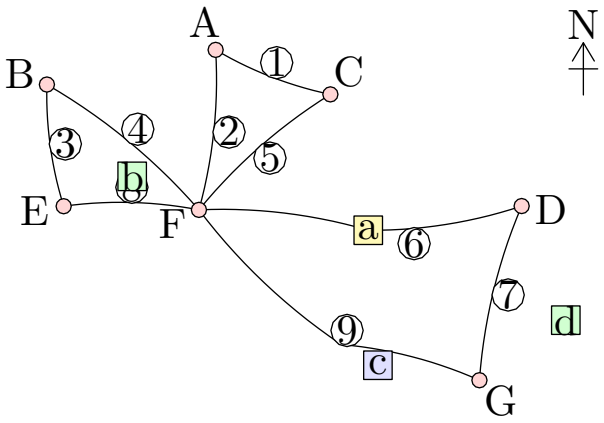
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G
Nombre de rues	2	2	2	2	2	6	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $18 = 2 \times 9$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Or la poste n'est pas un carrefour : c'est une adresse **au milieu d'une rue**. Le facteur y passe donc comme il passe partout ailleurs — il consomme la rue 6 d'un côté en partant, de l'autre en revenant. Le départ et l'arrivée étant confondus, **tous** les carrefours sont traversés, donc tous doivent être **pairs**.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient à la poste.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°10

Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il sort de la poste et remonte le **sentier des Prés** ⑥ vers l'ouest jusqu'à Rond-point des Vaches **(F)**.
2. Il tourne à droite dans la **rue Haute** ②, vers le nord, jusqu'à Coin du Lavoir **(A)**.
3. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ①, vers l'est, jusqu'à Place Sainte-Croix **(C)**.
4. Il tourne à droite dans la **rue de l'Église** ⑤, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches **(F)**.
5. Il tourne à droite dans le **quai aux Fleurs** ④, vers le nord-ouest, jusqu'à Place de l'Église **(B)**.
6. Il tourne à gauche dans le **chemin Creux** ③, vers le sud, jusqu'à Fontaine Notre-Dame **(E)**.
7. Il tourne à gauche dans le **chemin de Ronde** ⑧, vers l'est, jusqu'à Rond-point des Vaches **(F)**.
8. Il tourne à droite dans le **passage du Marché** ⑨, vers le sud-est, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(G)**.
9. Il tourne à gauche dans l'**allée des Tilleuls** ⑦, vers le nord, jusqu'à Place de la Fontaine **(D)**.
10. Il reprend alors le **sentier des Prés** ⑥, dont il lui restait la seconde moitié, et regagne la poste : toutes les rues ont été faites une fois et une seule.

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.