La tournée du facteur

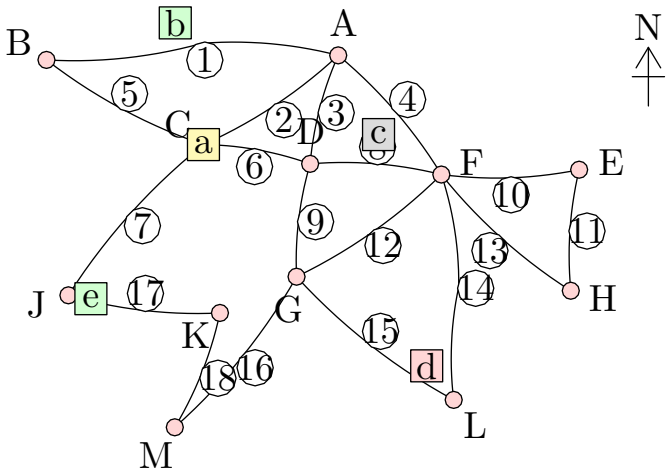
Problème — Fiche n°105

EULE0105

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① quai aux Fleurs	⑩ passage du Marché	Ⓐ Rond-point du Pont	**a** la poste
② rue Basse	⑪ allée des Peupliers	Ⓑ Placette des Ormes	**b** la bibliothèque
③ rue Verte	⑫ chemin de Ronde	Ⓒ Carrefour des Tilleuls	**c** le cimetière
④ rue des Jardins	⑬ boulevard du Parc	Ⓓ Carrefour du Moulin	**d** la boulangerie
⑤ rue Haute	⑭ rue de la Poste	Ⓔ Place des Tanneurs	**e** la gendarmerie
⑥ rue de la Mairie	⑮ rue du Stade	Ⓕ Rond-point du Stade	
⑦ rue du Moulin	⑯ chemin du Lavoir	Ⓖ Rond-point des Vaches	
⑧ venelle du Chat	⑰ sentier des Prés	Ⓗ Place du Marché	
⑨ rue Neuve	⑱ rue du Four	Ⓙ Place aux Herbes	
		Ⓚ Coin du Lavoir	
		Ⓛ Fontaine Notre-Dame	
		Ⓜ Place du Vieux-Puits	

Légende du plan

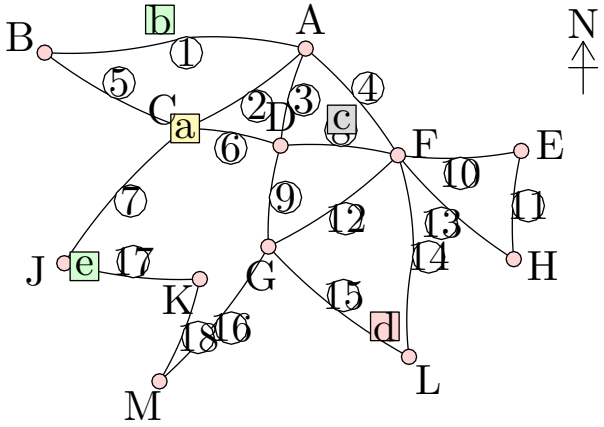
Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?

3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M
Nombre de rues	4	2	4	4	2	6	4	2	2	2	2	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $36 = 2 \times 18$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **C**, et le facteur doit y revenir. Ce carrefour est donc à la fois le départ et l'arrivée : le facteur en repart aussitôt arrivé, il le traverse comme les autres. **Tous** les carrefours, celui de la poste compris, doivent donc être **pairs**.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient à la poste.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°105

EULE0105

Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il part de Carrefour des Tilleuls **(C)**, prend la **rue Basse** ② vers le nord-est et atteint Rond-point du Pont **(A)**.
2. Il tourne à gauche dans le **quai aux Fleurs** ①, vers l'ouest, jusqu'à Placette des Ormes **(B)**.
3. Il tourne à gauche dans la **rue Haute** ⑤, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(C)**.
4. Il continue tout droit dans la **rue de la Mairie** ⑥, vers l'est, jusqu'à Carrefour du Moulin **(D)**.
5. Il tourne à gauche dans la **rue Verte** ③, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Pont **(A)**.
6. Il tourne à droite dans la **rue des Jardins** ④, vers le sud-est, jusqu'à Rond-point du Stade **(F)**.
7. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin **(D)**.
8. Il tourne à gauche dans la **rue Neuve** ⑨, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches **(G)**.
9. Il tourne à gauche dans le **chemin de Ronde** ⑫, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point du Stade **(F)**.
10. Il tourne à droite dans le **passage du Marché** ⑩, vers l'est, jusqu'à Place des Tanneurs **(E)**.
11. Il tourne à droite dans l'**allée des Peupliers** ⑪, vers le sud, jusqu'à Place du Marché **(H)**.
12. Il tourne à droite dans le **boulevard du Parc** ⑬, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point du Stade **(F)**.
13. Il prend dans la **rue de la Poste** ⑭, vers le sud, jusqu'à Fontaine Notre-Dame **(L)**.
14. Il tourne à droite dans la **rue du Stade** ⑮, vers le nord-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches **(G)**.
15. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ⑯, vers le sud-ouest, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(M)**.
16. Il prend dans la **rue du Four** ⑱, vers le nord, jusqu'à Coin du Lavoir **(K)**.
17. Il tourne à gauche dans le **sentier des Prés** ⑰, vers l'ouest, jusqu'à Place aux Herbes **(J)**.
18. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** ⑦, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(C)**.

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.