La tournée du facteur

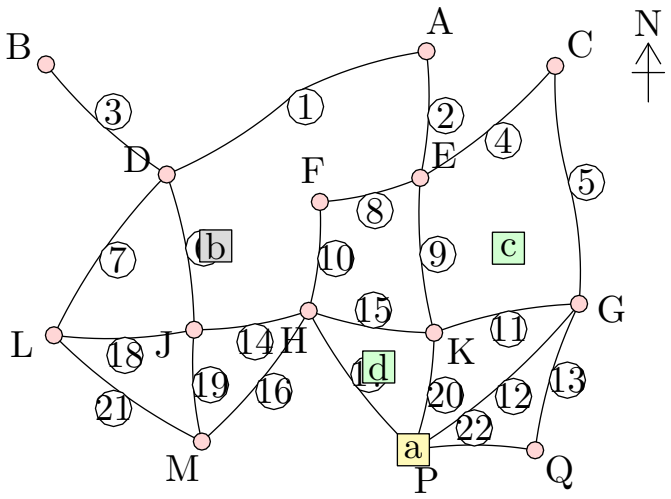
Problème — Fiche n°109

EULE0109

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① chemin des Vignes	⑫ rue Haute	Ⓐ Place aux Herbes	**a** la poste
② rue des Écoles	⑬ chemin du Lavoir	Ⓑ Place du Marché	**b** le stade
③ impasse du Vieux-Four	⑭ sentier des Prés	Ⓒ Fontaine Notre-Dame	**c** la bibliothèque
④ allée des Tilleuls	⑮ rue de l'Église	Ⓓ Carrefour du Moulin	**d** la mairie
⑤ boulevard du Parc	⑯ avenue de la Gare	Ⓔ Rond-point du Pont	
⑥ rue de la Mairie	⑰ venelle du Chat	Ⓕ Place des Tanneurs	
⑦ passage du Marché	⑱ rue Basse	Ⓖ Carrefour des Quatre-Chemins	
⑧ rue de la Poste	⑲ rue Neuve	Ⓗ Carrefour de la Mairie	
⑨ rue du Stade	⑳ rue du Puits	Ⓙ Carrefour du Lavoir	
⑩ chemin Creux	㉑ quai aux Fleurs	Ⓚ Rond-point de la Gare	
⑪ rue du Four	㉒ chemin de Ronde	Ⓛ Carrefour de l'Hôpital	
		Ⓜ Carrefour des Tilleuls	
		Ⓟ Rond-point du Stade	
		Ⓠ Place du Vieux-Puits	

Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.

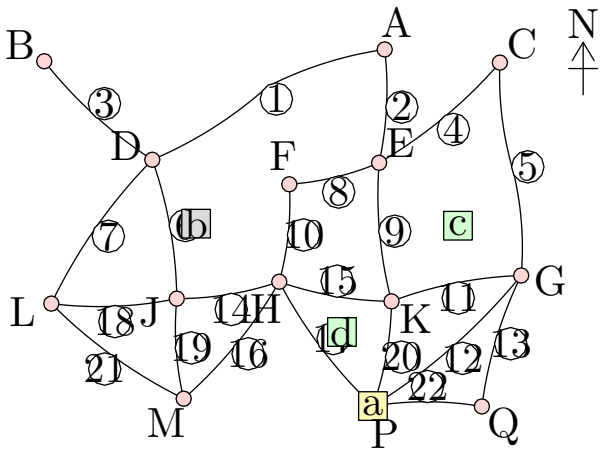
La tournée du facteur

Problème — Fiche n°109

2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	P
Nombre de rues	2	1	2	4	4	2	4	5	4	4	3	3	4
Parité	pair	**impair**	pair	pair	pair	pair	pair	**impair**	pair	pair	**impair**	**impair**	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $44 = 2 \times 22$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : B, H, L, M — il y en a 4.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **P**, et le facteur doit y revenir. Ce carrefour est donc à la fois le départ et l'arrivée : le facteur en repart aussitôt arrivé, il le traverse comme les autres. **Tous** les carrefours, celui de la poste compris, doivent donc être **pairs**.

3.

Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (B, H, L, M).

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

Combien de rues en double, au minimum ? Il faut apparier les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°109

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.