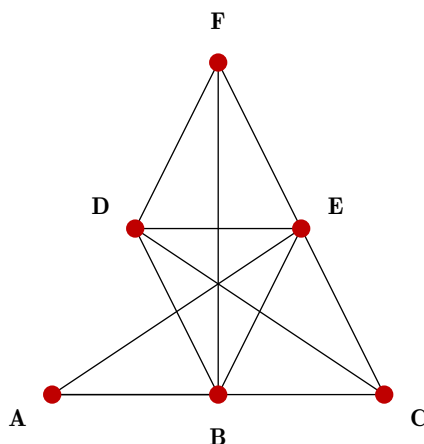




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier. Les lettres désignent les **carrefours**, les traits les **rues**. Il y a **10 rues** en tout : $[AB]$, $[AC]$, $[AE]$, $[BD]$, $[BE]$, $[BF]$, $[CD]$, $[CF]$, $[DE]$, $[DF]$.



Le facteur voudrait **emprunter chaque rue exactement une fois** — ni deux fois la même, ni en oublier. Il peut passer plusieurs fois par un même carrefour, cela ne le dérange pas.

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **La tournée est-elle possible ?** Si oui, en donner une en précisant le point de départ ; si non, le démontrer.

Correction

La tournée du facteur — Correction

1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F
Nombre de rues	3	4	3	4	3	3
Parité	impair	pair	impair	pair	impair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $20 = 2 \times 10$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : A, C, E, F — il y en a 4.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Or une tournée n'a qu'un **seul départ** et une **seule arrivée**. Il ne peut donc pas y avoir plus de **deux** carrefours impairs.

3.

Impossible. Le quartier compte 4 carrefours impairs (A, C, E, F), alors qu'une tournée en tolère au plus deux.

Chacun de ces 4 carrefours exigerait d'être un départ ou une arrivée. Avec un seul départ et une seule arrivée disponibles, au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution : le facteur devra forcément repasser par une rue déjà faite.

Combien de rues en double, au minimum ? Il faut appairer les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.

Le critère d'Euler, à retenir. Si le plan est d'un seul tenant, la tournée est possible **si et seulement si** le nombre de carrefours impairs vaut **0** (on revient au départ) ou **2** (on part de l'un et on finit à l'autre). Dans tous les autres cas, c'est impossible.

Un peu d'histoire. Ce problème est né à Königsberg en 1736 : les habitants cherchaient une promenade franchissant les sept ponts de la ville une seule fois chacun. Euler démontra que c'était impossible — les quatre quartiers avaient tous un nombre impair de ponts. C'est l'acte de naissance de la **théorie des graphes**.