La tournée du facteur

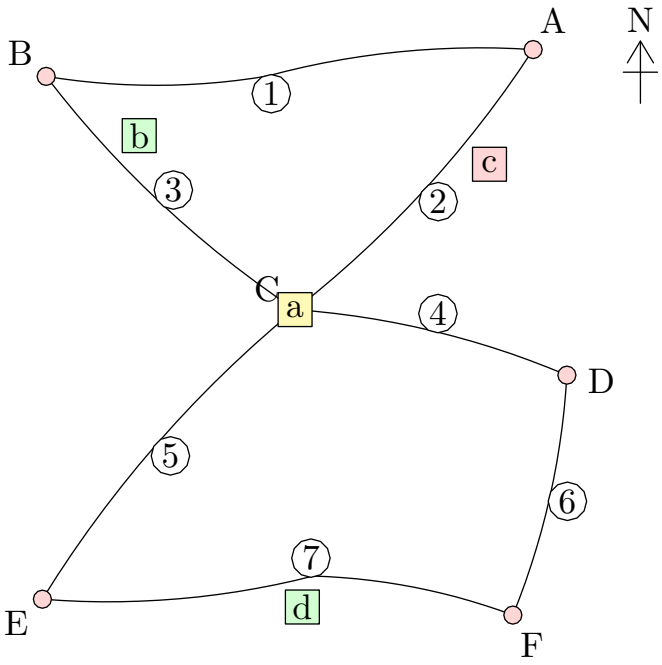
Problème — Fiche n°201

EULE0201

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① passage du Marché	⑤ venelle du Chat	Ⓐ Place du Marché	**a** la poste
② rue du Stade	⑥ rue des Écoles	Ⓑ Place du Vieux-Puits	**b** la mairie
③ rue du Pont	⑦ allée des Tilleuls	Ⓒ Carrefour de l'Hôpital	**c** le lavoir
④ sentier des Prés		Ⓓ Placette des Ormes	**d** la gendarmerie
		Ⓔ Place aux Herbes	
		Ⓕ Place de la Fontaine	

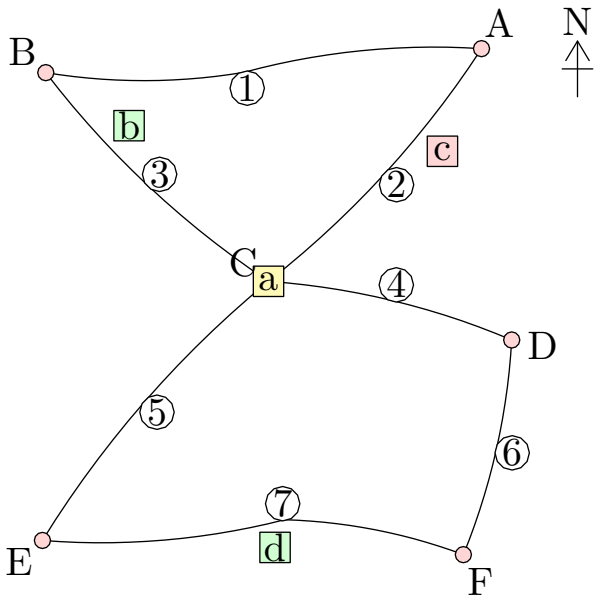
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F
Nombre de rues	2	2	4	2	2	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $14 = 2 \times 7$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **C**, et le facteur doit y revenir. Ce carrefour est donc à la fois le départ et l'arrivée : le facteur en repart aussitôt arrivé, il le traverse comme les autres. **Tous** les carrefours, celui de la poste compris, doivent donc être **pairs**.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient à la poste.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°201

Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il part de Carrefour de l'Hôpital **(C)**, prend la **rue du Stade** ② vers le nord-est et atteint Place du Marché **(A)**.
2. Il tourne à gauche dans le **passage du Marché** ①, vers l'ouest, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(B)**.
3. Il tourne à gauche dans la **rue du Pont** ③, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(C)**.
4. Il continue tout droit dans le **sentier des Prés** ④, vers l'est, jusqu'à Placette des Ormes **(D)**.
5. Il tourne à droite dans la **rue des Écoles** ⑥, vers le sud, jusqu'à Place de la Fontaine **(F)**.
6. Il tourne à droite dans l'**allée des Tilleuls** ⑦, vers l'ouest, jusqu'à Place aux Herbes **(E)**.
7. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑤, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(C)**.

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.