La tournée du facteur

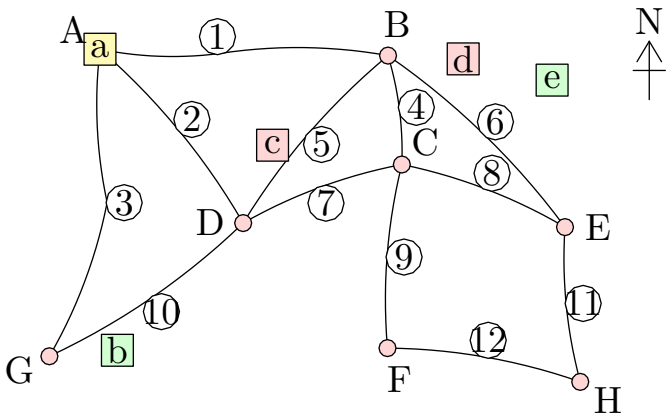
Problème — Fiche n°207

EULE0207

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue du Puits	⑦ venelle du Chat	Ⓐ Carrefour des Quatre-Chemins	**a** la poste
② rue Haute	⑧ allée des Peupliers	Ⓑ Carrefour du Moulin	**b** la bibliothèque
③ rue Neuve	⑨ rue de la Mairie	Ⓒ Rond-point des Vaches	**c** le marché couvert
④ rue des Écoles	⑩ avenue de la Gare	Ⓓ Carrefour de l'Hôpital	**d** la pharmacie
⑤ rue du Pont	⑪ quai aux Fleurs	Ⓔ Rond-point du Pont	**e** la gendarmerie
⑥ chemin de Ronde	⑫ chemin Creux	Ⓕ Place aux Herbes	
		Ⓖ Place du Vieux-Puits	
		Ⓗ Place de l'Église	

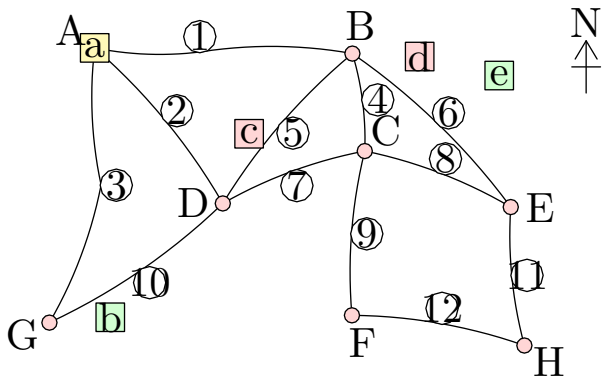
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de rues	3	4	4	4	3	2	2	2
Parité	**impair**	pair	pair	pair	**impair**	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $24 = 2 \times 12$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : A, E — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **A**, et le facteur doit y revenir. Ce carrefour est donc à la fois le départ et l'arrivée : le facteur en repart aussitôt arrivé, il le traverse comme les autres. **Tous** les carrefours, celui de la poste compris, doivent donc être **pairs**.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, A et E : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Le facteur, lui, part de la poste en **A** et doit y revenir : son départ et son arrivée sont confondus. Aucun carrefour ne peut donc rester impair — et il y en a deux.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de A à E. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°207

EULE0207

Ce parcours, en partant de A :

1. Il part de Carrefour des Quatre-Chemins **(A)**, prend la **rue du Puits** ① vers l'est et atteint Carrefour du Moulin **(B)**.
2. Il tourne à droite dans la **rue des Écoles** ④, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches **(C)**.
3. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑦, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(D)**.
4. Il tourne à droite dans la **rue Haute** ②, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins **(A)**.
5. Il tourne à gauche dans la **rue Neuve** ③, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(G)**.
6. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ⑩, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(D)**.
7. Il continue tout droit dans la **rue du Pont** ⑤, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour du Moulin **(B)**.
8. Il tourne à droite dans le **chemin de Ronde** ⑥, vers le sud-est, jusqu'à Rond-point du Pont **(E)**.
9. Il prend dans l'**allée des Peupliers** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches **(C)**.
10. Il tourne à gauche dans la **rue de la Mairie** ⑨, vers le sud, jusqu'à Place aux Herbes **(F)**.
11. Il tourne à gauche dans le **chemin Creux** ⑫, vers l'est, jusqu'à Place de l'Église **(H)**.
12. Il tourne à gauche dans le **quai aux Fleurs** ⑪, vers le nord, jusqu'à Rond-point du Pont **(E)**.