La tournée du facteur

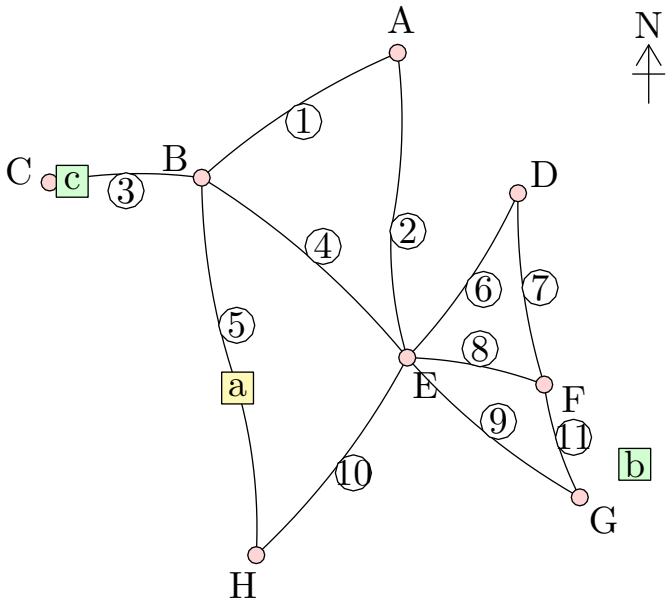
Problème — Fiche n°22

EULE0022

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① chemin du Lavoir	⑦ chemin Creux	Ⓐ Place aux Herbes	**a** la poste
② boulevard du Parc	⑧ rue Neuve	Ⓑ Carrefour des Tilleuls	**b** la mairie
③ impasse des Roses	⑨ rue de la Mairie	Ⓒ Place des Tanneurs	**c** la bibliothèque
④ rue Basse	⑩ venelle du Chat	Ⓓ Place Sainte-Croix	
⑤ rue du Stade	⑪ allée des Peupliers	Ⓔ Rond-point des Vaches	
⑥ chemin de Ronde		Ⓕ Carrefour de l'Hôpital	
		Ⓖ Place de l'Église	
		Ⓗ Place du Vieux-Puits	

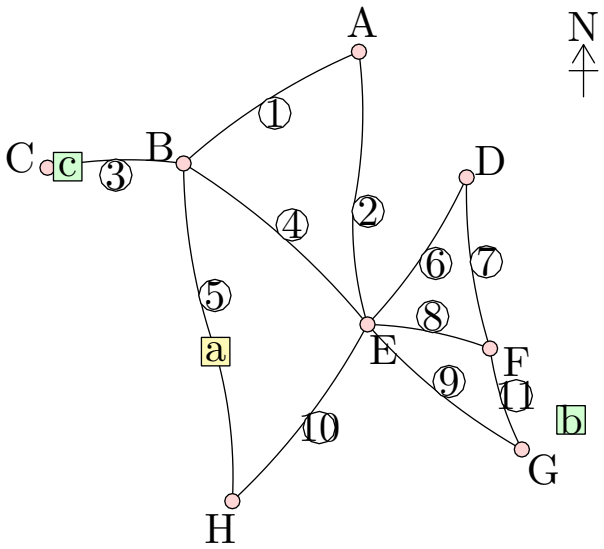
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de rues	2	4	1	2	6	3	2	2
Parité	pair	pair	**impair**	pair	pair	**impair**	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $22 = 2 \times 11$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : C, F — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Or la poste n'est pas un carrefour : c'est une adresse **au milieu d'une rue**. Le facteur y passe donc comme il passe partout ailleurs — il consomme la rue 5 d'un côté en partant, de l'autre en revenant. Le départ et l'arrivée étant confondus, **tous** les carrefours sont traversés, donc tous doivent être **pairs**.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, C et F : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Le facteur, lui, part de la poste et doit y revenir : son départ et son arrivée sont le même point, et ce point n'est même pas un carrefour. C'est impossible ici.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de C à F. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°22

Ce parcours, en partant de C :

1. Il part de Place des Tanneurs **(C)**, prend l'**impasse des Roses** ③ vers l'est et atteint Carrefour des Tilleuls **(B)**.
2. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ①, vers le nord-est, jusqu'à Place aux Herbes **(A)**.
3. Il tourne à droite dans le **boulevard du Parc** ②, vers le sud, jusqu'à Rond-point des Vaches **(E)**.
4. Il prend dans la **rue Basse** ④, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(B)**.
5. Il tourne à gauche dans la **rue du Stade** ⑤, vers le sud, jusqu'à Place du Vieux-Puits **(H)**.
6. Il tourne à gauche dans la **venelle du Chat** ⑩, vers le nord-est, jusqu'à Rond-point des Vaches **(E)**.
7. Il continue tout droit dans le **chemin de Ronde** ⑥, vers le nord-est, jusqu'à Place Sainte-Croix **(D)**.
8. Il prend dans le **chemin Creux** ⑦, vers le sud, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(F)**.
9. Il tourne à droite dans la **rue Neuve** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches **(E)**.
10. Il tourne à gauche dans la **rue de la Mairie** ⑨, vers le sud-est, jusqu'à Place de l'Église **(G)**.
11. Il tourne à gauche dans l'**allée des Peupliers** ⑪, vers le nord, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(F)**.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.