La tournée du facteur

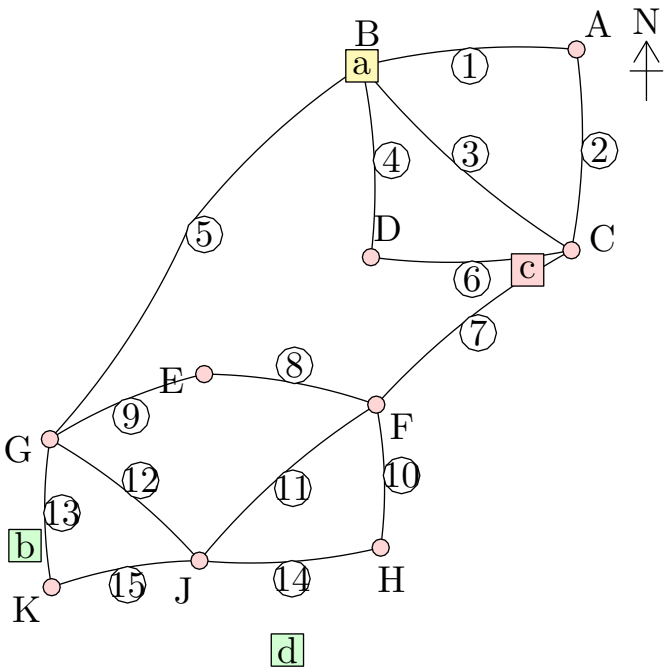
Problème — Fiche n°221

EULE0221

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① chemin Creux	⑨ rue des Jardins	Ⓐ Place du Vieux-Puits	**a** la poste
② boulevard du Parc	⑩ rue du Four	Ⓑ Carrefour du Moulin	**b** la salle des fêtes
③ chemin des Vignes	⑪ rue Verte	Ⓒ Carrefour des Tilleuls	**c** la pharmacie
④ rue du Pont	⑫ avenue de la Gare	Ⓓ Place des Tanneurs	**d** la mairie
⑤ quai aux Fleurs	⑬ allée des Tilleuls	Ⓔ Place aux Herbes	
⑥ rue du Puits	⑭ rue Neuve	Ⓕ Carrefour des Quatre-Chemins	
⑦ rue de l'Église	⑮ sentier des Prés	Ⓖ Rond-point des Vaches	
⑧ rue de la Poste		Ⓗ Place de la Fontaine	
		Ⓙ Carrefour de l'Hôpital	
		Ⓚ Coin du Lavoir	

Légende du plan

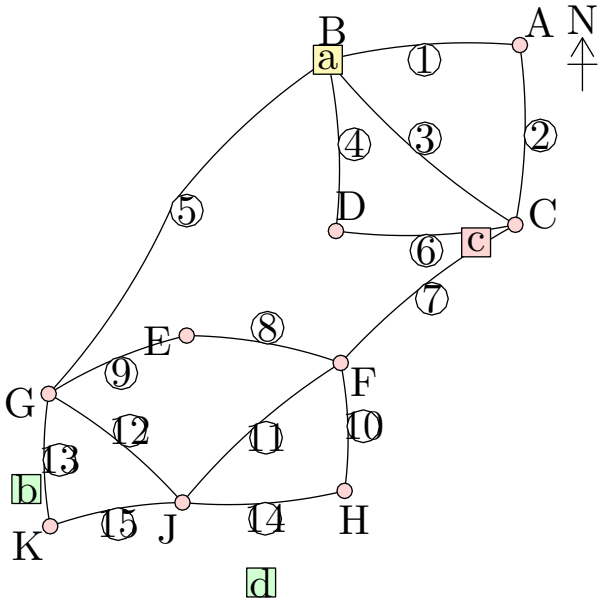
Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.

2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
Nombre de rues	2	4	4	2	2	4	4	2	4	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $30 = 2 \times 15$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **B**, et le facteur doit y revenir. Ce carrefour est donc à la fois le départ et l'arrivée : le facteur en repart aussitôt arrivé, il le traverse comme les autres. **Tous** les carrefours, celui de la poste compris, doivent donc être **pairs**.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient à la poste.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°221

Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il part de Carrefour du Moulin **(B)**, prend le **chemin Creux** ① vers l'est et atteint Place du Vieux-Puits **(A)**.
2. Il tourne à droite dans le **boulevard du Parc** ②, vers le sud, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(C)**.
3. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ③, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin **(B)**.
4. Il prend dans la **rue du Pont** ④, vers le sud, jusqu'à Place des Tanneurs **(D)**.
5. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ⑥, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(C)**.
6. Il prend dans la **rue de l'Église** ⑦, vers le sud-ouest, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins **(F)**.
7. Il tourne à droite dans la **rue de la Poste** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Place aux Herbes **(E)**.
8. Il continue tout droit dans la **rue des Jardins** ⑨, vers le sud-ouest, jusqu'à Rond-point des Vaches **(G)**.
9. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ⑫, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(J)**.
10. Il tourne à gauche dans la **rue Verte** ⑪, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins **(F)**.
11. Il tourne à droite dans la **rue du Four** ⑩, vers le sud, jusqu'à Place de la Fontaine **(H)**.
12. Il tourne à droite dans la **rue Neuve** ⑭, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(J)**.
13. Il continue tout droit dans le **sentier des Prés** ⑮, vers l'ouest, jusqu'à Coin du Lavoir **(K)**.
14. Il tourne à droite dans l'**allée des Tilleuls** ⑬, vers le nord, jusqu'à Rond-point des Vaches **(G)**.
15. Il continue tout droit dans le **quai aux Fleurs** ⑤, vers le nord-est, jusqu'à Carrefour du Moulin **(B)**.

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.