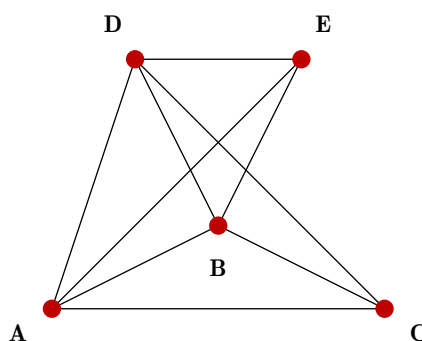




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier. Les lettres désignent les **carrefours**, les traits les **rues**. Il y a **9** rues en tout : $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[AE]$, $[BC]$, $[BD]$, $[BE]$, $[CD]$, $[DE]$.



Le facteur voudrait **emprunter chaque rue exactement une fois** — ni deux fois la même, ni en oublier. Il peut passer plusieurs fois par un même carrefour, cela ne le dérange pas.

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **La tournée est-elle possible ?** Si oui, en donner une en précisant le point de départ ; si non, le démontrer.



Correction

La tournée du facteur — Correction

1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E
Nombre de rues	4	4	3	4	3
Parité	pair	pair	impair	pair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $18 = 2 \times 9$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : C, E — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

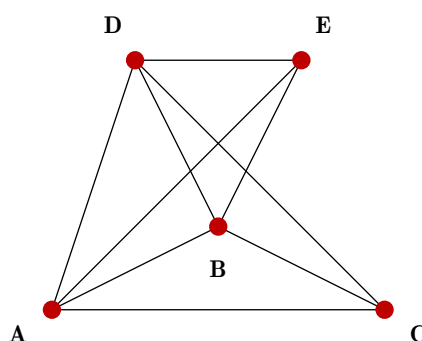
Or une tournée n'a qu'un **seul départ** et une **seule arrivée**. Il ne peut donc pas y avoir plus de **deux** carrefours impairs.

3.

C'est possible, mais à une condition : il faut partir de C et arriver en E (ou l'inverse) — les deux carrefours impairs.

Un itinéraire possible :

$C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$



Le plan : les 9 rues sont toutes parcourues une fois par cet itinéraire.

Cet itinéraire comporte 9 étapes, soit exactement les 9 rues, chacune une seule fois.

Attention au point de départ. Partir d'un carrefour pair condamnerait la tournée : on peut vérifier qu'aucun itinéraire complet ne commence ailleurs qu'en C ou E.

Le critère d'Euler, à retenir. Si le plan est d'un seul tenant, la tournée est possible **si et seulement si** le nombre de carrefours impairs vaut **0** (on revient au départ) ou **2** (on part de l'un et on finit à l'autre). Dans tous les autres cas, c'est impossible.

Un peu d'histoire. Ce problème est né à Königsberg en 1736 : les habitants cherchaient une promenade franchissant les sept ponts de la ville une seule fois chacun. Euler démontra que c'était impossible — les quatre quartiers avaient tous un nombre impair de ponts. C'est l'acte de naissance de la **théorie des graphes**.