La tournée du facteur

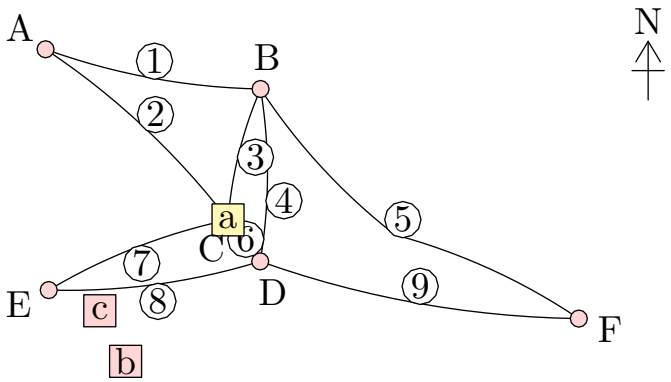
Problème — Fiche n°391

EULE0391

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue Neuve	⑥ rue Verte	Ⓐ Place de la Fontaine	**a** la poste
② rue du Moulin	⑦ chemin des Vignes	Ⓑ Carrefour des Tilleuls	**b** la pharmacie
③ rue de la Poste	⑧ boulevard du Parc	Ⓒ Carrefour du Lavoir	**c** le lavoir
④ avenue de la Gare	⑨ venelle du Chat	Ⓓ Carrefour de l'Hôpital	
⑤ rue du Four		Ⓔ Coin du Lavoir	
		Ⓕ Place de l'Église	

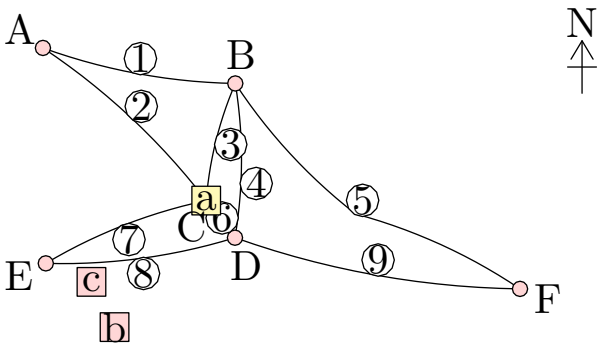
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F
Nombre de rues	2	4	4	4	2	2
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	pair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $18 = 2 \times 9$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Aucun carrefour n'a un nombre impair de rues : ils sont tous pairs.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Ici la poste est **sur un carrefour**, en **C**, et le facteur doit y revenir. Ce carrefour est donc à la fois le départ et l'arrivée : le facteur en repart aussitôt arrivé, il le traverse comme les autres. **Tous** les carrefours, celui de la poste compris, doivent donc être **pairs**.

3.

Oui. Aucun carrefour n'est impair : chacun peut être traversé de part en part. Le facteur revient à la poste.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°391

Voici une tournée possible — ce n'est pas la seule :

1. Il part de Carrefour du Lavoir **(C)**, prend la **rue du Moulin** ② vers le nord-ouest et atteint Place de la Fontaine **(A)**.
2. Il prend dans la **rue Neuve** ①, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(B)**.
3. Il tourne à droite dans la **rue de la Poste** ③, vers le sud, jusqu'à Carrefour du Lavoir **(C)**.
4. Il tourne à gauche dans la **rue Verte** ⑥, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(D)**.
5. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ④, vers le nord, jusqu'à Carrefour des Tilleuls **(B)**.
6. Il prend dans la **rue du Four** ⑤, vers le sud-est, jusqu'à Place de l'Église **(F)**.
7. Il tourne à droite dans la **venelle du Chat** ⑨, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour de l'Hôpital **(D)**.
8. Il tourne à gauche dans le **boulevard du Parc** ⑧, vers l'ouest, jusqu'à Coin du Lavoir **(E)**.
9. Il tourne à droite dans le **chemin des Vignes** ⑦, vers l'est, jusqu'à Carrefour du Lavoir **(C)**.

4.

La question ne se pose pas : la tournée est possible au départ de la poste, et elle le resterait où qu'on installe celle-ci — aucun carrefour n'est impair.