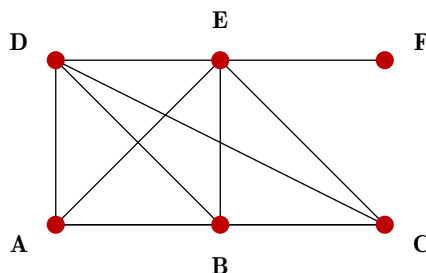




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier. Les lettres désignent les **carrefours**, les traits les **rues**. Il y a **10 rues** en tout : $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[AE]$, $[BC]$, $[BD]$, $[BE]$, $[CD]$, $[CE]$, $[DF]$.



Le facteur voudrait **emprunter chaque rue exactement une fois** — ni deux fois la même, ni en oublier. Il peut passer plusieurs fois par un même carrefour, cela ne le dérange pas.

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **La tournée est-elle possible ?** Si oui, en donner une en précisant le point de départ ; si non, le démontrer.

Correction

La tournée du facteur — Correction

1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F
Nombre de rues	4	4	4	4	3	1
Parité	pair	pair	pair	pair	impair	impair

Vérification : la somme de ces nombres vaut $20 = 2 \times 10$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : E, F — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

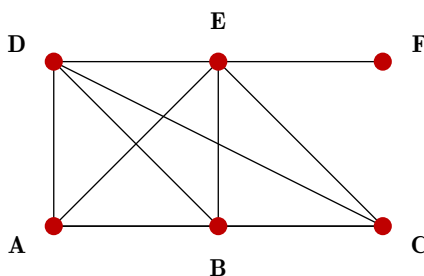
Or une tournée n'a qu'un **seul départ** et une **seule arrivée**. Il ne peut donc pas y avoir plus de **deux** carrefours impairs.

3.

C'est possible, mais à une condition : il faut partir de E et arriver en F (ou l'inverse) — les deux carrefours impairs.

Un itinéraire possible :

E → B → D → A → B → C → A → E → C → D → F



Le plan : les 10 rues sont toutes parcourues une fois par cet itinéraire.

Cet itinéraire comporte 10 étapes, soit exactement les 10 rues, chacune une seule fois.

Attention au point de départ. Partir d'un carrefour pair condamnerait la tournée : on peut vérifier qu'aucun itinéraire complet ne commence ailleurs qu'en E ou F.

Le critère d'Euler, à retenir. Si le plan est d'un seul tenant, la tournée est possible **si et seulement si** le nombre de carrefours impairs vaut **0** (on revient au départ) ou **2** (on part de l'un et on finit à l'autre). Dans tous les autres cas, c'est impossible.

Un peu d'histoire. Ce problème est né à Königsberg en 1736 : les habitants cherchaient une promenade franchissant les sept ponts de la ville une seule fois chacun. Euler démontra que c'était impossible — les quatre quartiers avaient tous un nombre impair de ponts. C'est l'acte de naissance de la **théorie des graphes**.