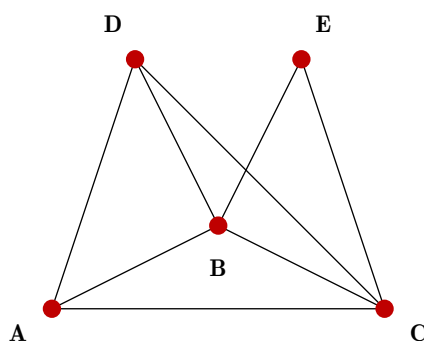




Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

## La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier. Les lettres désignent les **carrefours**, les traits les **rues**. Il y a **8 rues** en tout :  $[AB]$ ,  $[AC]$ ,  $[AD]$ ,  $[BC]$ ,  $[BD]$ ,  $[BE]$ ,  $[CD]$ ,  $[CE]$ .



Le facteur voudrait **emprunter chaque rue exactement une fois** — ni deux fois la même, ni en oublier. Il peut passer plusieurs fois par un même carrefour, cela ne le dérange pas.

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **La tournée est-elle possible ?** Si oui, en donner une en précisant le point de départ ; si non, le démontrer.

## Correction

### La tournée du facteur — Correction

1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

| Carrefour      | A      | B    | C    | D      | E    |
|----------------|--------|------|------|--------|------|
| Nombre de rues | 3      | 4    | 4    | 3      | 2    |
| Parité         | impair | pair | pair | impair | pair |

Vérification : la somme de ces nombres vaut  $16 = 2 \times 8$ , car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

**Les carrefours à nombre impair de rues sont : A, D — il y en a 2.**

2.

**Le raisonnement clé.** Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

**Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».**

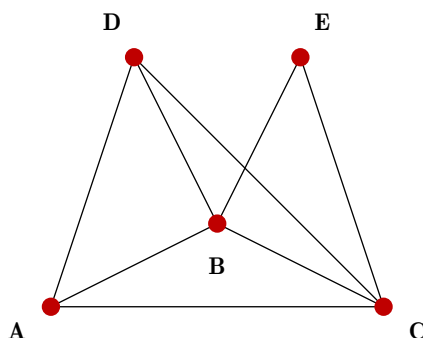
Or une tournée n'a qu'un **seul départ** et une **seule arrivée**. Il ne peut donc pas y avoir plus de **deux** carrefours impairs.

3.

**C'est possible, mais à une condition : il faut partir de A et arriver en D (ou l'inverse) — les deux carrefours impairs.**

Un itinéraire possible :

**A → D → C → E → B → C → A → B → D**



*Le plan : les 8 rues sont toutes parcourues une fois par cet itinéraire.*

**Cet itinéraire comporte 8 étapes, soit exactement les 8 rues, chacune une seule fois.**

**Attention au point de départ.** Partir d'un carrefour condamnerait la tournée : on peut vérifier qu'aucun itinéraire complet ne commence ailleurs qu'en A ou D.

**Le critère d'Euler, à retenir.** Si le plan est d'un seul tenant, la tournée est possible **si et seulement si** le nombre de carrefours impairs vaut **0** (on revient au départ) ou **2** (on part de l'un et on finit à l'autre). Dans tous les autres cas, c'est impossible.

**Un peu d'histoire.** Ce problème est né à Königsberg en 1736 : les habitants cherchaient une promenade franchissant les sept ponts de la ville une seule fois chacun. Euler démontra que c'était impossible — les quatre quartiers avaient tous un nombre impair de ponts. C'est l'acte de naissance de la **théorie des graphes**.