La tournée du facteur

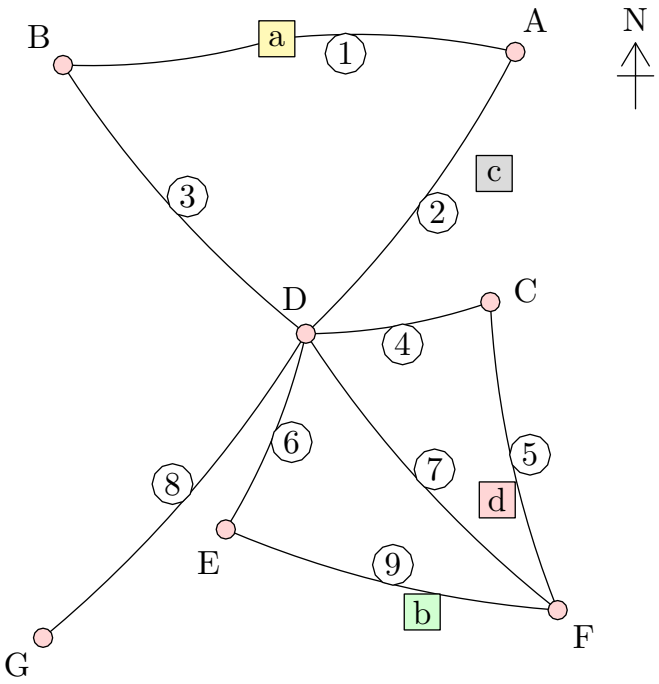
Problème — Fiche n°82

EULE0082

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① avenue de la Gare	⑥ rue du Moulin	Ⓐ Place aux Herbes	**a** la poste
② rue Basse	⑦ allée des Peupliers	Ⓑ Place de la Fontaine	**b** la gendarmerie
③ chemin du Lavoir	⑧ impasse du Puits	Ⓒ Place du Marché	**c** l'église
④ rue des Écoles	⑨ rue du Puits	Ⓓ Carrefour du Moulin	**d** la boulangerie
⑤ rue Verte		Ⓔ Placette des Ormes	
		Ⓕ Carrefour des Quatre-Chemins	
		Ⓖ Place de l'Église	

Légende du plan

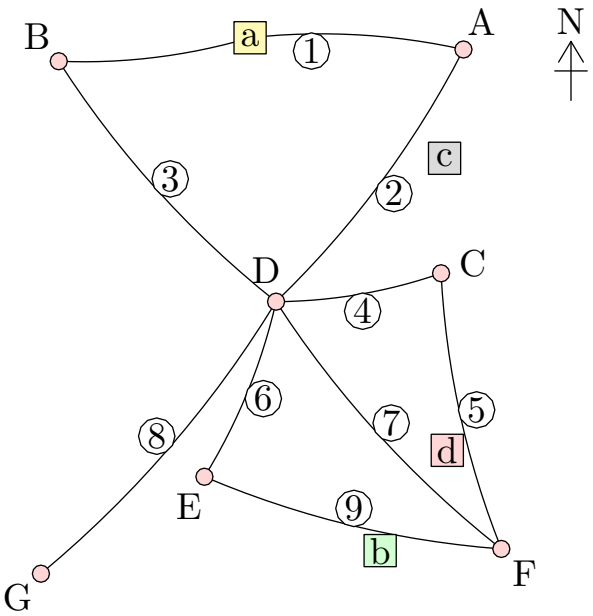
Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.

4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G
Nombre de rues	2	2	2	6	2	3	1
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	**impair**	**impair**

Vérification : la somme de ces nombres vaut $18 = 2 \times 9$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : F, G — il y en a 2.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Or la poste n'est pas un carrefour : c'est une adresse **au milieu d'une rue**. Le facteur y passe donc comme il passe partout ailleurs — il consomme la rue 1 d'un côté en partant, de l'autre en revenant. Le départ et l'arrivée étant confondus, **tous** les carrefours sont traversés, donc tous doivent être **pairs**.

3.

Non. Deux carrefours sont impairs, F et G : l'un devrait être le départ, l'autre l'arrivée.

Le facteur, lui, part de la poste et doit y revenir : son départ et son arrivée sont le même point, et ce point n'est même pas un carrefour. C'est impossible ici.

4.

Oui, une tournée existe — mais elle va de F à G. En installant la poste à l'un de ces deux carrefours, le facteur pourrait faire toutes les rues une fois. En revanche il ne reviendrait pas à la poste : il finirait à l'autre bout du quartier.

La tournée du facteur

Problème — Fiche n°82

EULE0082

Ce parcours, en partant de F :

1. Il part de Carrefour des Quatre-Chemins **(F)**, prend la **rue Verte** ⑤ vers le nord et atteint Place du Marché **(C)**.
2. Il tourne à gauche dans la **rue des Écoles** ④, vers l'ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin **(D)**.
3. Il tourne à droite dans la **rue Basse** ②, vers le nord-est, jusqu'à Place aux Herbes **(A)**.
4. Il tourne à gauche dans l'**avenue de la Gare** ①, vers l'ouest, jusqu'à Place de la Fontaine **(B)**.
5. Il tourne à gauche dans le **chemin du Lavoir** ③, vers le sud-est, jusqu'à Carrefour du Moulin **(D)**.
6. Il tourne à droite dans la **rue du Moulin** ⑥, vers le sud, jusqu'à Placette des Ormes **(E)**.
7. Il tourne à gauche dans la **rue du Puits** ⑨, vers l'est, jusqu'à Carrefour des Quatre-Chemins **(F)**.
8. Il tourne à gauche dans l'**allée des Peupliers** ⑦, vers le nord-ouest, jusqu'à Carrefour du Moulin **(D)**.
9. Il tourne à gauche dans l'**impasse du Puits** ⑧, vers le sud-ouest, jusqu'à Place de l'Église **(G)**.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.