La tournée du facteur

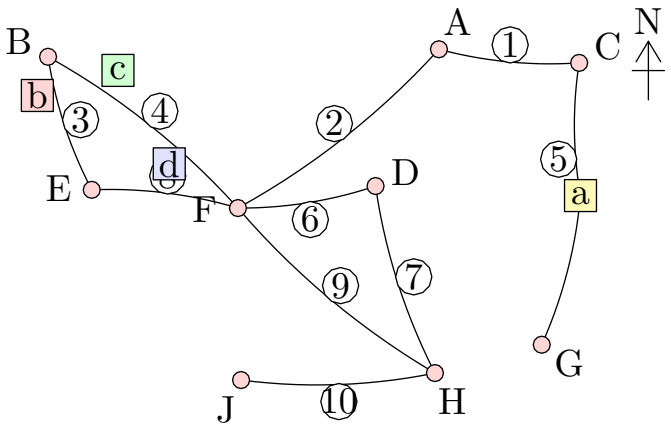
Problème — Fiche n°94

EULE0094

Un facteur veut parcourir toutes les rues de son quartier en n'empruntant chacune qu'une seule fois. Selon le plan, c'est tantôt facile, tantôt impossible — et l'on peut le dire d'avance, sans essayer, en regardant simplement combien de rues aboutissent à chaque carrefour.

La tournée du facteur

Voici le plan d'un quartier.



Le facteur part de la poste, doit emprunter chaque rue exactement une fois puis revenir à la poste déposer sa sacoche.

Les rues		Les carrefours	Les bâtiments
① rue des Écoles	⑥ rue Basse	Ⓐ Placette des Ormes	**a** la poste
② chemin Creux	⑦ rue des Jardins	Ⓑ Place de la Fontaine	**b** le lavoir
③ rue du Four	⑧ rue Neuve	Ⓒ Coin du Lavoir	**c** la mairie
④ passage du Marché	⑨ rue de l'Église	Ⓓ Place de l'Église	**d** l'école
⑤ impasse du Puits	⑩ impasse des Cerisiers	Ⓔ Place aux Herbes	
		Ⓕ Carrefour de l'Hôpital	
		Ⓖ Place du Marché	
		Ⓗ Rond-point du Stade	
		Ⓙ Place des Tanneurs	

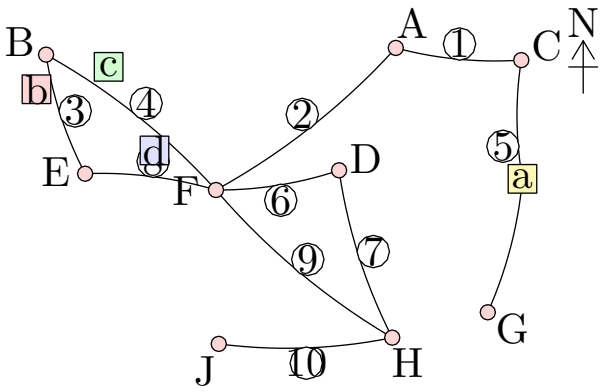
Légende du plan

Les questions se suivent : la première n'est qu'un comptage, la dernière demande une preuve.

1. Pour **chaque carrefour**, compter le nombre de rues qui y aboutissent. Présenter les résultats dans un tableau.
2. Le facteur imagine sa tournée. À chaque fois qu'il **traverse** un carrefour, combien de rues utilise-t-il ? Qu'en déduire pour les carrefours où aboutit un nombre **impair** de rues ?
3. **Le facteur peut-il faire sa tournée et revenir à la poste ?** Si oui, décrire un trajet possible ; sinon, démontrer que c'est impossible.
4. Si ce n'est pas possible : une tournée existe-t-elle **malgré tout** dans ce quartier, en partant d'ailleurs ? Si oui, où faudrait-il installer la poste — et le facteur y reviendrait-il ?

Correction

La tournée du facteur — Correction



1. On compte les rues aboutissant à chaque carrefour :

Carrefour	A	B	C	D	E	F	G	H	J
Nombre de rues	2	2	2	2	2	5	1	3	1
Parité	pair	pair	pair	pair	pair	**impair**	**impair**	**impair**	**impair**

Vérification : la somme de ces nombres vaut $20 = 2 \times 10$, car chaque rue est comptée à ses **deux** extrémités.

Les carrefours à nombre impair de rues sont : F, G, H, J — il y en a 4.

2.

Le raisonnement clé. Quand le facteur **traverse** un carrefour, il y arrive par une rue et en repart par une autre : il consomme les rues **deux par deux**. Un carrefour traversé 3 fois voit donc 6 de ses rues utilisées — toujours un nombre **pair**.

Un carrefour où aboutit un nombre impair de rues ne peut donc pas être seulement traversé : il doit être le départ ou l'arrivée de la tournée. Là, une rue reste « non appariée ».

Or la poste n'est pas un carrefour : c'est une adresse **au milieu d'une rue**. Le facteur y passe donc comme il passe partout ailleurs — il consomme la rue 5 d'un côté en partant, de l'autre en revenant. Le départ et l'arrivée étant confondus, **tous** les carrefours sont traversés, donc tous doivent être **pairs**.

3.

Non. Le quartier compte 4 carrefours impairs (F, G, H, J).

Chacun d'eux exigerait d'être un départ ou une arrivée. Une tournée n'a qu'un départ et qu'une arrivée : au moins 2 d'entre eux resteraient sans solution.

4.

Non plus. Où que l'on installe la poste, il reste 4 carrefours impairs, et une tournée n'en tolère que deux : un pour partir, un pour arriver.

C'est la différence avec un quartier à deux carrefours impairs, où déplacer la poste suffisait. Ici, le problème ne vient pas du point de départ mais du plan lui-même.

Combien de rues en double, au minimum ? Il faut apparier les carrefours impairs deux à deux, ce qui demande 1 passage(s) supplémentaire(s) au mieux pour une tournée ouverte, un de plus pour revenir à la poste. C'est le « problème du postier chinois », étudié bien après Euler.

À remarquer. Ce quartier a une impasse. On y entre et on en ressort par la même rue : elle serait forcément empruntée deux fois. Une impasse interdit donc à elle seule la tournée qui revient à son point de départ — sans qu'il soit besoin de compter quoi que ce soit.